

Probabilitatea eta Prozesu Estokastikoak

Gaien Aurkibidea

Sarrera	vii
1 Multzoak eta Probabilitate Espazioak	1
1.1 Multzoak	1
1.1.1 Sarrera	1
1.1.2 Limiteak	4
1.1.3 σ -aljebrak	8
1.2 Probabilitate Espazioak	13
1.2.1 Oinarrizko Definizioak eta Propietateak	13
1.2.2 Dynkin-en Teorema	16
1.2.3 Aplikazioak	18
1.3 Frogapenak	19
1.3.1 Dynkin-en Teoremaren frogapena	19
1.4 Ariketak	21
2 Zorizko Aldagaiak	23
2.1 Alderantzizko Aplikazioak	23
2.2 Aplikazio Neurgarriak eta Induzitutako Probabilitate Neurriak	26
2.3 Aplikazioek Sortutako σ -algebra	28
2.4 Independentzia	31
2.5 Borel-Cantelli-ren Lemak	33
2.6 Frogapenak	35
2.6.1 2.1.2 Proposizioaren frogapena	35
2.6.2 Oinarrizko Irizpidearen frogapena	36
2.7 Ariketak	38
3 Itxaropena	41
3.1 Definizioa	41
3.1.1 Zorizko Aldagai Sinpleak	41
3.1.2 Zorizko Aldagai Ez-negatiboak	43
3.1.3 Zorizko Aldagai Errealak	44
3.1.4 Zorizko Aldagai Konplexuak	45
3.2 Ezaugarri Nagusiak	46

3.3	Integral Definitugabeak	47
3.4	Itxaropen Baldintzatua	48
3.5	$\mathcal{L}_p$ Espazioak eta Ezberdintza Garrantzitsuak	49
3.6	Bariantza eta Kobariantza	52
3.7	Frogapenak	53
3.7.1	Markov-en ezberdintzen frogapena	53
3.8	Ariketak	54
4	Funtzio Karakteristikoak	55
4.1	Definizioak	55
4.2	Oinarrizko Propietateak	56
4.3	Funtzio karakteristikoen Deribatuak eta Momentuak	58
4.4	Inbertsio Formulak	59
4.5	Funtzio karakteristikoen Identifikazioa	61
4.6	Frogapenak	62
4.6.1	$\mathcal{N}(0, 1)$ banaketaren funtzio karakteristikoa	62
4.6.2	$\varphi_X(t)$ uniformeki jarraitua da $\mathbb{R}^n$	63
4.6.3	Levy-ren inbertsio formularen frogapenaren laburpena	64
4.7	Ariketak	65
5	Konbergentzia	67
5.1	Sarrera	67
5.2	Konbergentzia Ia-Ziurra	67
5.3	Probabilitatezko Konbergentzia	68
5.4	Konbergentzia L_p -n	71
5.5	Banaketazko Konbergentzia	75
5.6	Limitearen Teorema Zentrala	77
5.7	Frogapenak	78
5.7.1	Zenbaki Handien Lege Indartsuaren Frogapena	78
5.7.2	5.5.1 Proposizioaren frogapena	79
5.7.3	Limitearen Teorema Zentralaren Frogapena	80
5.8	Ariketak	81
6	Prozesu Estokastikoak	83
6.1	Sarrera	83
6.2	Markov Kateak	84
6.2.1	Adibidea	84
6.2.2	Definizioa	85
6.2.3	Probabilitate-limiteak	86
6.2.4	Banaketa Egonkorra	88
6.2.5	Ergodikotasuna	90
6.3	Poisson Prozesua	91

6.4	Frogapenak	94
6.4.1	Egoera finitodun Markov Kateen Teorema Ergodikoa	94
6.4.2	Poisson banaketa eta exponentziala	94
6.5	Ariketak	96
7	Baldintzazko Itxaropena	99
7.1	Definizioa	99
7.2	Propietateak	100
7.3	Martingalak	103
7.4	Frogapenak	104
7.4.1	7.1.1 Proposizioaren frogapena	104
7.4.2	7.2.3 Proposizioaren frogapena	105
7.5	Ariketak	106
	Bibliografia	109

Sarrera

Liburu honetan EHuko Matematika Graduko laugarren mailan eskaintzen den Probabilitatea eta Prozesu Estokastikoak ikasgaian lantzen diren eduki nagusiak aurkezten dira. Lan honen abiapuntu teorikoa neurri-teoria da, eta probabilitate-neurria neurri finitua dela kontuan hartuta, probabilitatea bere ikuspegi orokor eta formalenean garatzen da. Bestalde, testu honetan, probabilitatearen oinarritzko kontzeptuak aurrez ezagunak direla suposatuko dugu. Gainera, analisi konplexuko eta kalkuluko hainbat oinarritzko kontzeptu erabiliko ditugu eta, horregatik, gomendagarria da kontzeptu horiek behar bezala menperatuta izatea liburu honekin hasi aurretik.

Liburua EHuko Probabilitatea eta Prozesu Estokastikoak ikasgaia egiten duten ikasleei zuzenduta dagoen arren, bere edukiak probabilitatearen arloan prestakuntza sakinagoa eskuratu nahi duten irakasle eta ikertzaileentzat ere erabilgarriak izan daitezke. Testua egituratzerakoan irakurketa eta ikaskuntza errazteko irizpideak hartu dira kontuan: testuan zehar erabiltzen diren emaitza nagusiak modu esplizituan identifikatzen dira, eta frogapen luze edo teknikoenak kapitulu bakoitzaren amaieran kokatzen dira. Antolaketa horri esker, irakurleak arreta nagusiki kontzeptu teorikoetan eta aplikazioetan jar dezake, oinarritzko xehetasun teknikoetan gehiegi trabatu gabe.

Era berean, kapitulu bakoitzaren amaieran ariketa-sorta bana eskaintzen da, landutako edukiak sendotzeko eta aplikatzeko helburuarekin. Ariketa horiek izaera eta zailtasun maila desberdinetakoak dira: kontzeptuen ulermen oinarritzkoa lantzeko ariketak ez ezik, emaitzen sakontze teorikoa eta aplikazio esanguratsuak eskatzen dituztenak ere barne hartzen dituzte.

Liburu honen bidez, irakurleak probabilitatearen oinarri teorikoen ulermen zorrotza eskuratzea, emaitza nagusien frogapenak modu autonomoan jarraitzeko gai izatea, eta tresna probabilistiko horiek prozesu estokastiko adierazgarrien azterketan aplikatzeko gaitasuna garatzea espero da.

Liburu honetako edukiak bi bloke nagusitan egituratzen dira:

- **Limitearen Teorema Zentralaren frogapena.** Probabilitate-teoriako emaitzarik garrantzitsuenetako bat Limitearen Teorema Zentrala dela kontuan hartuta, lehenengo blokearen helburu nagusia teorema horren frogapen zorrotz eta osoa

eskaintzea da. Horretarako, beharrezkoak diren tresnak modu progresiboan aurkezten dira: funtzio karakteristikoak, konbergentzia-kontzeptuak eta horiek ulertzeko funtsezko emaitzak. Eduki horiek liburuaren lehenengo bost kapitulueta lantzen dira.

- **Prozesu estokastiko nagusien azterketa.** Bigarren blokean gaur egungo zientzia eta teknologiaren hainbat arlotan funtsezkoak diren prozesu estokastikoen adibide adierazgarriak aurkezten dira, besteak beste datuen analisisian, telekomunikazioetan, finantzetan eta adimen artifizialean erabiltzen diren ereduak. Bloke hau liburuaren azken bi kapitulueta garatzen da, eta bertan Markov kateak, Poisson prozesua eta martingalak aztertzen dira.

Liburu osoan zehar notazio estandar eta zabalki onartua erabiltzen da, eta beharrezkoa denean espresuki zehazten da.

Azkenik, liburuaren amaieran bibliografia hautatu bat jaso da, hemen aurkezten diren edukiak testuinguru zabalago batean kokatzeko eta irakurle interesdunei probabilitatearen eta prozesu estokastikoen arloan sakontzen jarraitzeko erreferentzia nagusiak eskaintzeko asmoz.

1

Multzoak eta Probabilitate Espazioak

1.1 Multzoak

1.1.1 Sarrera

Ikasgai honetan zorizko esperimentuen azterketa egingo dugu. Zorizko esperimentuetan ezin da alde zuretik lortutako emaitza zehaztu. Trukatu gabeko dado bat botatzera-koan, adibidez, ez dakigu zein zenbaki aterako den. Ondorioz, dado-jaurtiketa baten emaitza behatzea zorizko esperimentu bat da.

Zorizko esperimentuetan ondoko notazioa erabiliko dugu:

- Ω Zorizko esperimentuaren emaitza posibleen multzoa da. Hau da, gure esperimentu burutzerakoan ez dugu jakingo zein izango den lortutako emaitza, baina badakigu zein izan ahal den emaitza posibleen multzoa. Dadoaren adibidean $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ da.

- $\mathcal{P}(\Omega)$ Ω -ren parteen multzoa da, hau da, Ω -ren azpimultzo guztien multzoa.

- Gertaerak $\mathcal{P}(\Omega)$ -ren elementuak dira. Alegia, A gertaera bat bada, $A \in \mathcal{P}(\Omega)$.

Gertaera posible guztien artean, elementu bakar batekoa denari oinarritzko gertaera deritzen. Hots, A oinarritzko gertaera da $A = \{\omega\}$ bada, non $\omega \in \Omega$ den.

Beste gertaera garrantzitsuak $\emptyset$ ezinezko gertaera eta Ω gertaera zurrak dira.

- Gertaeren familia (edo kolekzio) bat letra kaligrafikoa erabiliz idatziko dugu, hau da, $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \dots$. Esate baterako, A eta B gertaerak badira, orduan $\mathcal{A} = \{A, B\}$ izango da.

1.1.1 Oharra. Hemendik aurrera goiko notazioa erabiliko dugu. Garrantzitsua izango da gertaeren eta gertaeren familiaren arteko ezberdintasuna argi izatea. Hau da, A gertaera eta $\mathcal{A}$ gertaeren familia bada, orduan ondoko propietateak ditugu: $A \subset \Omega$, $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ eta $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$.

Gainera, askotan gertaerei multzo deituko diegu eta gertaeren familiei, berriz, multzoen familia.

Orain, gertaerei aplikatutako zenbait eragiketa aurkeztuko dugu:

- Kontrakotasuna. $A \subset \Omega$ bada, A -ren kontrakoa $\bar{A}$ (edo A^c ere) idazten da. Horrela, $\bar{\bar{A}} = A$ da.
- Ebakidura arbitrarioa. Izan bedi T edozein multzo (zenbakigarri edo ez), eta $A_t \subset \Omega$, $\forall t \in T$. Orduan,

$$\bigcap_{t \in T} A_t = \{\omega : \omega \in A_t \forall t \in T\}.$$

Goiko definizioarekin jarraituz, esango dugu A_t eta A_s binaka askeak direla ondoko betetzen bada: $A_t \cap A_s = \emptyset$, $\forall t \neq s$, $t, s \in T$.

- Bildura arbitrarioa. Izan bedi, T edozein multzo (zenbakigarri ez edo), eta $A_t \subset \Omega$, $\forall t \in T$. Orduan,

$$\bigcup_{t \in T} A_t = \{\omega : \exists t \text{ non } \omega \in A_t\}.$$

- Diferentzia. A eta B gertaerak badira, A eta B gertaeren diferentziak esan nahi du A ematen dela eta B ez. A eta B gertaeren diferentzia $A - B$ bezala idatziko dugu eta badakigu ere $A - B = A \cap \bar{B}$.
- Diferentzia simetrikoa. A eta B gertaerak badira, A eta B gertaeren diferentzi simetrikoak esan nahi du bietako bat baino ez dela ematen. A eta B gertaerak badira, A eta B gertaeren diferentzia simetrikoa $A \triangle B$ bezala idatziko dugu eta badakigu

$$A \triangle B = (A - B) \cup (B - A).$$

Orain, gertaeren arteko erlazioak azalduko ditugu:

- A parte B : Esaten dugu A parte B dela (edo $A \subset B$) ondoko betetzen bada:

$$\omega \in A \Rightarrow \omega \in B.$$

Gainera, $A \subset B$ bada, badakigu $A \cap B = A$ dela.

- Berdintza. Esaten dugu $A = B$ dela, $A \subset B$ eta $B \subset A$ betetzen badira. Alegia,

$$\omega \in A \iff \omega \in B.$$

1.1.2 Oharra. Hemendik aurrera $A \subset B$ notazioa erabiltzen dugunean, $A = B$ izan daitekela adierazi nahi dugu (hau da, A ez dela B -ren azpimultzo propioa). Beste liburu batzutan, $A \subseteq B$ bezala aurkitu ahal da idatzita.

Ondoko propietateak aztertuko ditugu orain.

1.1.1 Propietatea. Ondokoak egiazkoak dira:

- a) $A \subset B$ eta $B \subset C$, orduan $A \subset C$.
- b) $A \subset C$ eta $B \subset C$, orduan $A \cup B \subset C$.
- c) $C \subset A$ eta $C \subset B$, orduan $C \subset A \cap B$.
- d) $A \subset B \iff \bar{B} \subset \bar{A}$.

Frogapena. a) $A \subset B$ izateagatik, $\omega \in A$, orduan $\omega \in B$ eta $B \subset C$ izateagatik, $\omega \in B$, orduan $\omega \in C$. Beraz, $\omega \in A$ bada, orduan $\omega \in C$, hau da, $A \subset C$.

b) $A \subset C$ izateagatik, $\omega \in A$, orduan $\omega \in C$ eta $B \subset C$ izateagatik, $\omega \in B$, orduan $\omega \in C$. Beraz, $\omega \in A$ edo $\omega \in B$, orduan $\omega \in C$. Hau da, $\omega \in A \cup B$, orduan $\omega \in C$ eta, ondorioz, $A \cup B \subset C$.

c) $C \subset A$ izateagatik, $\omega \in C$, orduan $\omega \in A$ eta $C \subset B$ izateagatik, $\omega \in C$, orduan $\omega \in B$. Beraz, $\omega \in C$, orduan $\omega \in A$ eta $\omega \in B$. Hau da, $\omega \in C$, orduan $\omega \in A \cap B$ eta, ondorioz, $C \subset A \cap B$.

d) $\Rightarrow$ frogatuko dugu. $A \subset B$ izateagatik, $\omega \in A$, orduan $\omega \in B$. Ondorioz, $\omega \notin B$ bada, orduan $\omega \notin A$ (hau da, $\omega \in \bar{B}$, orduan $\omega \in \bar{A}$) eta, beraz, $\bar{B} \subset \bar{A}$. Beste inplikazioa antzeko moduan frogatzen da.

□

Orain, ikasten ari garen multzoek betetzen duten zenbait propietate aurkeztuko dugu. Frogapenak ez ditugu jarriko Probabilitateko oinarriko liburuetan agertzen direlako (esate baterako [1, 2]).

1.1.2 Propietatea. Ondokoak egiazkoak dira:

- a) $\bar{\bar{A}} = A$, $\bar{\emptyset} = \Omega$, $\bar{\Omega} = \emptyset$.
- b) $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$.
- c) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$.
- d) *De Morgan-en Legeak:* T multzo bat bada (zenbakigarria edo ez),

$$\overline{\bigcup_{t \in T} A_t} = \bigcap_{t \in T} \bar{A}_t, \quad \overline{\bigcap_{t \in T} A_t} = \bigcup_{t \in T} \bar{A}_t.$$

e) Banatze-legea: T multzo bat bada (zenbakigarria edo ez)

$$B \cap \left(\bigcup_{t \in T} A_t \right) = \bigcup_{t \in T} (B \cap A_t),$$

$$B \cup \left(\bigcap_{t \in T} A_t \right) = \bigcap_{t \in T} (B \cup A_t).$$

Orain, funtzio adierazlea definituko dugu.

1.1.1 Definizioa. $A \subset \Omega$ bada, funtzio adierazlea ondoko moduan adierazten da:

$$\mathbf{1}_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in A \text{ bada,} \\ 0, & \omega \in \bar{A} \text{ bada.} \end{cases}$$

Funtzio adierazleak ondoko propietateak betetzen ditu:

1. $\mathbf{1}_\Omega = 1, \mathbf{1}_\emptyset = 0$.
2. $\forall A \subseteq \Omega, \mathbf{1}_{\bar{A}} = 1 - \mathbf{1}_A$.
3. $\forall A, B \subseteq \Omega$ non $A \subset B$, $\mathbf{1}_B = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_{B-A}$. Gainera, $\mathbf{1}_{B-A} = \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A$ and $\mathbf{1}_A \leq \mathbf{1}_B$.
4. $\forall A, B \subseteq \Omega, \mathbf{1}_{A \cap B} = \mathbf{1}_A \cdot \mathbf{1}_B = \min(\mathbf{1}_A, \mathbf{1}_B)$.
5. $\forall A, B \subseteq \Omega, \mathbf{1}_{A \cup B} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_{A \cap B} = \max(\mathbf{1}_A, \mathbf{1}_B)$.
6. $\forall A, B \subseteq \Omega, \mathbf{1}_{A-B} = \mathbf{1}_A - \mathbf{1}_{A \cap B}$.

Goiko propietateen frogapena ez dugu jarriko oinarritzko probabilitateko liburuetan dauden propietateak baitira.

1.1.3 Oharra. Hemendik aurrera ondoko notazioa erabiliko dugu. Demagun f eta g edozein funtzio badira, orduan

$$f \leq g \iff f(\omega) \leq g(\omega), \forall \omega \in \Omega.$$

1.1.2 Limiteak

Kalkuluko kontzeptu garrantzitsuak limsup eta liminf dira. Orain, kontzeptu horiek gertaeretara (edo beste modu batean esanda $\mathcal{P}(\Omega)$ -ren elementuak diren multzoetara) ere definitu ahal direla aztertuko dugu. Ez bada besterik esaten, kapitulu honetan zehar suposatuko dugu $A_1, A_2, \dots$, gertaeren segida bat dela, hau da, $A_n \subset \Omega$, $n = 1, 2, \dots$ izanik.

1.1.2 Definizioa. *Izan bedi $A_n \subset \Omega$, $n = 1, 2, \dots$, orduan*

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k, \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k.$$

1.1.4 Oharra. *Izan bedi $T_n = \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$. Orduan $T_n \subset T_{n+1}$ ematen da eta, oinarritzko probabilitateko honako emaitza kontuan hartuta,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} T_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k.$$

Beraz, $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n$ -ri $\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n$ deitzen zaio.

Antzeko moduan, $H_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$ definitzen badugu, $H_{n+1} \subset H_n$ ematen da eta beraz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} H_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} H_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k.$$

Bestalde, inf eta sup kontzeptuak ere gertaeratarako (edo $\mathcal{P}(\Omega)$ -ren elementuak diren multzoetarako) definituko ditugu.

1.1.3 Definizioa. *Izan bedi $A_n \subset \Omega$, $n = 1, 2, \dots$, orduan*

$$\inf_{k \geq n} A_k = \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k, \quad \sup_{k \geq n} A_k = \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k.$$

1.1.5 Oharra. *Aurrerago frogatuko dugu ondoko propietatea betetzen dela:*

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\inf_{k \geq n} A_k \right), \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{k \geq n} A_k \right).$$

1.1.1 Proposizioa. *Izan bedi $A_n \subset \Omega$, $n = 1, 2, \dots$, orduan*

- a) $\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n = \{\omega \in \Omega \mid \omega \in A_n, n \text{ guztietan kopuru finitu batean izan ezik}\}.$
- b) $\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n = \{\omega \in \Omega \mid \omega \in A_n, n \text{ kopuru infinitu batean}\}.$
- c) $\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n \subset \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n.$

Frogapena. a) Izan bedi $\omega \in \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n$. Beraz, existitzen da $n \geq 1$ non $\omega \in \bigcap_{k \geq n} A_k$ eta, beraz, existitzen da $n \geq 1$ non $\forall k \geq n \omega \in A_k$. Alegia, $\omega \in A_n$, n guztietarako, $A_1, \dots, A_{n-1}$ izan ezik, hau da, kopuru finitu batean izan ezik.

- b) Izan bedi $\omega \in \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n$. Beraz, $\forall n \omega \in \cup_{k \geq n} A_k$ edo, beste modu batean esanda, $\forall n$ existitzen da k non $\omega \in A_k$. Orduan, $\omega \in A_n$ n infinituetarako.
- c) Demagun $\omega \in \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n$. Orduan, $\omega \in A_n$ n guztietarako kopuru finitu batean izan ezik. Horregatik, $\omega \in A_n$ n kopuru infinitu batean, hau da, $\omega \in \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n$.

□

Ondoko adibideak frogatzen du aurreko proposizioiko c) atalaren propietatearen kontrakoa dela beti ematen, hau da, $\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n \subset \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n$ ez dela beti egia.

1.1.1 Adibidea. Demagun $B, C \subset \Omega$. Definitu $A_n = B$ n bakoitia bada eta $A_n = C$ n bikoitia bada. Frogatu $\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n = B \cap C$ eta $\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n = B \cup C$.

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n &= \bigcap_{n \geq 1} \bigcup_{k \geq n} A_k = \bigcap_{n \geq 1} B \cup C = B \cup C. \\ \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n &= \bigcup_{n \geq 1} \bigcap_{k \geq n} A_k = \bigcup_{n \geq 1} B \cap C = B \cap C. \end{aligned}$$

Ohartu $\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n \subset \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n$ ez dela egia kasu honetan.

Orain, ondoko propietatea azalduko dugu. Ohartu De Morgan-en legeen antzekoak direla.

1.1.2 Proposizioa. Izan bedi $A_n \subset \Omega$, $n = 1, 2, \dots$, orduan

- a) $\overline{\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \overline{A_n}$.
- b) $\overline{\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n} = \liminf_{n \rightarrow \infty} \overline{A_n}$.

Frogapena. a) 1.1.2 Definizioa eta De Morgan-en legeak erabiliz, ondoko berdintzak ematen dira:

$$\overline{\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n} = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} \overline{A_k} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \overline{A_n}.$$

- b) Aurreko ataleko frogapenaren antzeko moduan froga daiteke.

□

1.1.4 Definizioa. Izan bedi $A_n \subset \Omega$, $n = 1, 2, \dots$, orduan $\{A_n\}$ segidaren limitea A da ondokoa betetzen bada

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n = A.$$

Limitea existitzen bada eta A bada, $A_n \rightarrow A$ edo $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A$ bezala idatziko dugu.

1.1.2 Adibidea. Demagun $A_n = [0, \frac{n}{n+1})$, $n = 1, 2, \dots$. Frogatu $[0, 1)$ dela segida honen limitea.

$$\begin{aligned}\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n &= \bigcap_{n \geq 1} \bigcup_{k \geq n} A_k = \bigcap_{n \geq 1} \bigcup_{k \geq n} \left[0, \frac{k}{k+1}\right) = \bigcap_{n \geq 1} \left[0, \frac{n}{n+1}\right) = [0, 1). \\ \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n &= \bigcup_{n \geq 1} \bigcap_{k \geq n} A_k = \bigcup_{n \geq 1} \bigcap_{k \geq n} \left[0, \frac{1}{k+1}\right) = \bigcup_{n \geq 1} [0, 1) = [0, 1).\end{aligned}$$

Beraz, kasu honetan $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = [0, 1)$ da.

1.1.6 Oharra. Ohartu Adibidea 1.1.1.-ko kasuan ez dagoela limiterik.

Hemendik aurrera, $A_n \uparrow$ ematen dela esango dugu (hau da, A_n ez beherakorrala dela) $A_n \subset A_{n+1}$ gertatzen bada edozein n -rako. Era berean, $A_n \downarrow$ ematen dela esango dugu (hau da, A_n ez gorakorrala dela) $A_{n+1} \subset A_n$ gertatzen bada edozein n -rako. Gainera, $\{A_n : n = 1, 2, \dots\}$ segida monotonoa izango da $A_n \uparrow$ edo $A_n \downarrow$ bada.

1.1.3 Proposizioa. Izan bedi $A_n \subset \Omega$, $n = 1, 2, \dots$.

$$\begin{aligned}a) \quad A_n \uparrow \text{ bada, orduan } \lim_{n \rightarrow \infty} A_n &= \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n. \\ b) \quad A_n \downarrow \text{ bada, orduan } \lim_{n \rightarrow \infty} A_n &= \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n.\end{aligned}$$

Frogapena. a) $A_n \uparrow$ denean, $\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ ematen dela frogatuko dugu. Alde batetik,

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, \quad (1.1)$$

lehenengo berdintzan $\liminf$ -en definizioa erabili dugu eta bigarrenean $A_n \uparrow$ propietatea. Bestetik,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n \subset \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n,$$

non lehenengo berdintza $\limsup$ -en definizioa da, bigarrena (1.1) ekuazioan frogatu dugu eta hirugarrena 1.1.1 Proposizioa c) atalean frogatuta dago. Honen ondorioz, $\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ ematen da.

b) $A_n \downarrow$ denean, $\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ ematen dela frogatuko dugu. Alde batetik,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n, \quad (1.2)$$

lehenengo berdintzan $\limsup$ -en definizioa erabili dugu eta bigarrenean $A_n \downarrow$ propietatea. Bestetik,

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \supset \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n \supset \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n,$$

non lehenengo berdintza $\liminf$ -en definizioa da, bigarrena (1.2) ekuazioan frogatu dugu eta hirugarrena 1.1.1 Proposizioko c) atalean frogatuta dago. Honen ondorioz, $\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ ematen da. $\square$

1.1.5 Oharran esandakoa frogatuko dugu orain.

1.1.1 Korolaria. *Demagun $\{B_n : n = 1, 2, \dots\}$ segida bat dela, orduan*

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} B_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\inf_{k \geq n} B_n \right), \limsup_{n \rightarrow \infty} B_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{k \geq n} B_n \right).$$

Frogapena:

Hartu $A_n = \inf_{k \geq n} B_n$ eta ohartu $A_n \uparrow$ gertatzen dela. Beraz, 1.1.3 Proposizioaren ondorioz,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

eta $A_n = \inf_{k \geq n} B_n$ erabiliz,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{k \geq n} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \inf_{k \geq n} B_n.$$

Orain, 1.1.3 Definizioaren arabera, $\inf_{k \geq n} B_n = \bigcap_{k=n}^{\infty} B_n$, beraz,

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \inf_{k \geq n} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} B_n.$$

Bukatzeko, 1.1.2 Definizioaren arabera, $\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} B_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} B_n$ ematen da. Beraz, frogatu dugu nahi duguna.

Beste adierazpena antzeko eran frogatu ahal da.

1.1.3 σ -aljebrak

Izan bedi $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ eta T multzo arbitrario bat. Orain, $\mathcal{C}$ -ren elementuei aplikatzen zaien zenbait eragiketa definituko ditugu:

1 Bildura arbitrarioa: $A_t \in \mathcal{C}, \forall t \in T$, orduan $\bigcup_{t \in T} A_t$.

2 Bildura zenbakigarria: $A_n \in \mathcal{C}$, $n = 1, 2, \dots$, orduan $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.

3 Bildura finitua: $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{C}$, orduan $\bigcup_{j=1}^n A_j$.

4 Ebakidura arbitrarioa: $A_t \in \mathcal{C}$, $\forall t \in T$, orduan $\bigcap_{t \in T} A_t$.

5 Ebakidura zenbakigarria: $A_n \in \mathcal{C}$, $n = 1, 2, \dots$, orduan $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$.

6 Ebakidura finitua: $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{C}$, orduan $\bigcap_{j=1}^n A_j$.

7 Kontrakotasuna: $A \in \mathcal{C}$ bada, orduan $\bar{A}$.

8 Limite monotonoak: $\{A_n : n = 1, 2, \dots\}$ segida bat bada eta

- $A_n \uparrow$ bada, orduan $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$,
- $A_n \downarrow$ bada, orduan $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcap_{j=1}^{\infty} A_j$.

Demagun $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ eta $\mathcal{O}$ aurreko eragiketetako bat. Orduan, esango dugu $\mathcal{C}$ itxia dela $\mathcal{O}$ eragiketarako, $\mathcal{C}$ -ri $\mathcal{O}$ eragiketa aplikatzerakoan lortutako multzoa $\mathcal{C}$ -n badago.

1.1.5 Definizioa. *Izan bedi $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$. Orduan $\mathcal{A}$ aljebra bat da, itxia bada 3, 6 eta 7 eragiketetarako.*

Orain ohartuko gara goiko definizioak oinarrizko probabilitateko liburuetan ikusitako definizioarekin zerikusia duela.

1.1.4 Proposizioa. *$\mathcal{A}$ itxia da 3, 6 eta 7 eragiketarako ondokoa ematen bada:*

- a) $\Omega \in \mathcal{A}$.
- b) $A \in \mathcal{A}$ bada, orduan $\bar{A} \in \mathcal{A}$.
- c) $A, B \in \mathcal{A}$ badira, orduan $A \cup B \in \mathcal{A}$.

Frogapena. • Frogatuko dugu $\mathcal{A}$ itxia dela 3 eragiketarako c) ematen bada. Demagun $A_1, A_2, A_3 \in \mathcal{A}$. Orduan,

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 = (A_1 \cup A_2) \cup A_3 \in \mathcal{A},$$

izan ere $A_1 \cup A_2 \in \mathcal{A}$ c) ematen delako eta beraz $B = A_1 \cup A_2$ bada, orduan $B \cup A_3 \in \mathcal{A}$ ematen da berriz c) atalagatik. Era berean froga daiteke $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ badira, orduan $\bigcup_{i=1}^n A_i \in \mathcal{A}$.

- Frogatuko dugu $\mathcal{A}$ itxia dela 6 eragiketarako b) ematen bada eta $\mathcal{A}$ itxia bada 3 eragiketarako. Demagun $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ direla; b) ematen denez, $\bar{A}_1, \dots, \bar{A}_n \in \mathcal{A}$ dugu. Gainera, $\mathcal{A}$ itxia denez 3 eragiketarako, $\bigcup_{i=1}^n \bar{A}_i \in \mathcal{A}$ eta, De Morgan-en Legeak erabiliz, $\bigcap_{i=1}^n A_i \in \mathcal{A}$. Alegia, $\mathcal{A}$ itxia da 6 eragiketarako.
- b) betetzen bada, orduan $\mathcal{A}$ itxia da 7 eragiketarako.

□

Orain, σ -algebra zer den aurkeztuko dugu.

1.1.6 Definizioa. *Izan bedi $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(\Omega)$. Orduan $\mathcal{B}$ Ω -ren σ -algebra da, itxia bada 2, 5 eta 7 eragiketarako.*

Argi badago zein den lagin espazioa, Ω -ren σ -algebra esan beharrean, σ -algebra esango dugu.

Orain azalduko dugu, kasu honetan ere, goiko definizioak oinarritzko probabilitateko liburuetan ematen den definizioarekin zerikusia duela. Frogapena 1.1.4 Proposiziokoaren antzekoa izateagatik, ez dugu jarriko.

1.1.5 Proposizioa. *Izan bedi $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(\Omega)$. Orduan, $\mathcal{B}$ itxia da 2, 5 eta 7 eragiketarako ondokoa ematen bada:*

- $\Omega \in \mathcal{B}$.
- $B \in \mathcal{B}$ bada, orduan $\bar{B} \in \mathcal{B}$.
- $B_1, B_2, \dots \in \mathcal{B}$ badira, orduan $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \in \mathcal{B}$.

Goiko propietateei erreparatuz, argi dago gertaera guztien espazioa σ -algebra izan behar dela. Horrela, itxia denez 2, 5 eta 7 eragiketarako, gertaeretan eragiketak aplikatuz, gertaerak lortzen ditugu.

Orain, σ -algebra eta aljibraren arteko harremana aztertuko dugu.

1.1.6 Proposizioa. *Multzo bat σ -algebra bada, orduan algebra da.*

Frogapena. 1.1.5 Proposizio eta 1.1.4 Proposizio kontuan hartuz, emaitza frogatutzat jo dezagu 1.1.5 Proposizioa c) propietatea ematen denean, 1.1.4 Proposizioa c) ematen dela frogatzen badugu. $\mathcal{B}$ σ -algebra izateagatik, badakigu $B_1, B_2, \dots \in \mathcal{B}$ badira, orduan $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \in \mathcal{B}$ ematen dela. Beraz, hartu $B_k = \emptyset$, $k > n$ guztientzat (ohartu $\emptyset \in \mathcal{B}$ definizioz) eta, horrela,

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = \bigcup_{i=1}^n B_i \in \mathcal{B}.$$

□

Orain, σ -algebra batzuk aztertuko ditugu.

- $\mathcal{B} = \mathcal{P}(\Omega)$. Definizioz, edozein gertaera $\mathcal{P}(\Omega)$ -ren barruan dago. Beraz, $\mathcal{P}(\Omega)$ itxia da edozein eragiketarako. Ondorioz, σ -algebra da.
- $\mathcal{B} = \{\emptyset, \Omega\}$. Honi σ -algebra tribiala deitzen diogu. $\bar{\emptyset} = \Omega$ eta $\bar{\Omega} = \emptyset$ direnez, $\mathcal{B}$ itxia dela 7 eragiketarako. Suposatu $B_i \in \mathcal{B}$, $i \geq 1$ izanik. 2. eragiketarako itxia dela frogatzeko, lehendabizi suposatu $B_i = \emptyset, \forall i$ eta, beraz, $\bigcup_{i \geq 1} B_i = \emptyset \in \mathcal{B}$. Orain, suposatu existitzen dela j non $B_i = \Omega$ den; horrela, $\bigcup_{i \geq 1} B_i = \Omega \in \mathcal{B}$. Eta horrela $\mathcal{B}$ 2 eragiketarako itxia dela frogatu dugu. Orain, 5. eragiketarako itxia dela frogatzeko, lehendabizi suposatu $B_i = \Omega, \forall i$ eta, beraz, $\bigcap_{i \geq 1} B_i = \Omega \in \mathcal{B}$. Orain, suposatu existitzen dela j non $B_i = \emptyset$ den; horrela, $\bigcap_{i \geq 1} B_i = \emptyset \in \mathcal{B}$. Eta horrela $\mathcal{B}$ 5 eragiketarako itxia dela frogatu dugu.

Hartu $\Omega = \mathbb{R}$ eta $\mathcal{B} = \{A \subset \mathbb{R} : A \text{ zenbakigarria da}\} \cup \{A \subset \mathbb{R} : \bar{A} \text{ zenbakigarria da}\}$ σ -algebra dela frogatu daiteke. Orain, σ -algebra honen inguruko ohar honetan zentratuko gara:

1.1.7 Oharra. $\mathcal{B} = \{A \subset \mathbb{R} : A \text{ zenbakigarria da}\} \cup \{A \subset \mathbb{R} : \bar{A} \text{ zenbakigarria da}\}$ bada, orduan ondokoa ematen da:

- $\mathcal{B} \neq \mathcal{P}(\mathbb{R})$ da. Izan ere, hartu $A = (-\infty, 0]$ eta oharatu $A \notin \mathcal{B}$ A ez delako zenbakigarria eta $\bar{A} = (0, +\infty)$ ere ez. Hala ere, $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$.
- $\mathcal{B}$ ez da itxia 1 eragiketarako. Izan ere, hartu edozein $t \leq 0$ eta $\{t\} \in \mathcal{B}$. Baina $\bigcup_{t \leq 0} \{t\} = (-\infty, 0] \notin \mathcal{B}$.

1.1.8 Oharra. $\Omega = \mathbb{N}$ hartuko dugu eta definitu

$$\mathcal{A} = \{A \subset \Omega : |A| < \infty\} \cup \{A \subset \Omega : |\bar{A}| < \infty\}$$

Frogatu daiteke $\mathcal{A}$ algebra dela, baina σ -algebra ez. Beraz, edozein σ -algebra algebra da (ikusi 1.1.6 Proposizioa), baina kontrakoa ez da egia.

Orain ondoko emaitza aurkeztuko dugu.

1.1.1 Lema. Izan bedi $\mathcal{O}$ goian definitutako edozein eragiketa (1-8 eragiketak) eta T multzo arbitrario bat. Demagun $\{\mathcal{C}_t\}_{t \in T}$ dugula, non $\mathcal{C}_t$ itxia den $\mathcal{O}$ eragiketarako $\forall t \in T$. Orduan, $\bigcap_{t \in T} \mathcal{C}_t$ itxia da $\mathcal{O}$ eragiketarako.

Frogapena. 2 eragiketarako frogatuko dugu emaitza hau (besteak antzeko modua frogatzen dira). Demagun $B_1, B_2, \dots$, non $B_i \in \bigcap_{t \in T} \mathcal{C}_t$, $i = 1, 2, \dots$. Orduan, $B_i \in \mathcal{C}_t$, $\forall t \in T$ eta $i = 1, 2, \dots$. Orain, $\mathcal{C}_t$ itxia denez 2 eragiketarako, $\bigcup_{i \geq 1} B_i \in \mathcal{C}_t$, $\forall t \in T$. Beraz, $\bigcup_{i \geq 1} B_i \in \bigcap_{t \in T} \mathcal{C}_t$, hau da $\bigcap_{t \in T} \mathcal{C}_t$ itxia da 2 eragiketarako. $\square$

Honen ondorioz, hurrengo emaitza dugu.

1.1.7 Proposizioa. σ -aljebren ebakidura, σ -algebra da eta aljebren ebakidura algebra da.

Orain, azalduko dugu goiko propietatea bildurarentzat ez dela betetzen.

1.1.9 Oharra. Hartu $\Omega = \{a, b, c\}$ eta definitu $\mathcal{B}_1 = \{\emptyset, \Omega, \{a\}, \{b, c\}\}$ eta $\mathcal{B}_2 = \{\emptyset, \Omega, \{b\}, \{a, c\}\}$. Erraz ikus daiteke $\mathcal{B}_1$ eta $\mathcal{B}_2$ σ -aljebrak direla, baina

$$\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 = \{\emptyset, \Omega, \{a\}, \{b\}, \{b, c\}, \{a, c\}\},$$

ez da σ -algebra; izan ere $\{a\} \in \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ eta $\{b\} \in \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$, baina $\{a, b\} \notin \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$.

Orain, $\mathcal{C}$ -k sortutako σ -aljebrarik txikiena definituko dugu.

1.1.7 Definizioa. Izan bedi $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(\Omega)$. Orduan, $\sigma(\mathcal{C})$ -ri $\mathcal{C}$ -k sortutako σ -algebra deituko diogu eta ondokoak betetzen ditu:

1. $\mathcal{C} \subset \sigma(\mathcal{C})$.
2. $\mathcal{B}$ σ -algebra bat bada non $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}$ den, orduan $\sigma(\mathcal{C}) \subset \mathcal{B}$.

Ohartu $\sigma(\mathcal{C})$ -ri $\mathcal{C}$ barruan duen (edo $\mathcal{C}$ -ren) σ -aljebrarik txikiena ere deitzen zaiola. Gainera, $\mathcal{P}(\Omega)$ σ -algebra bat da aurreko bi propietateak betetzen dituen (hau da, $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ eta edozein σ -algebra $\mathcal{P}(\Omega)$ -ren barruan dago).

Orain, $\sigma(\mathcal{C})$ -ren bakartasuna frogatuko dugu.

1.1.2 Lema. σ -algebra bakarra dago 1.1.7 Definizioaren ezaugarriak betetzen dituen.

Frogapena. Demagun $\sigma_1(\mathcal{C})$ eta $\sigma_2(\mathcal{C})$ 1.1.7 Definizioaren propietateak betetzen dituztela. Badakigu $\sigma_1(\mathcal{C})$ txikiena izateagatik eta $\sigma_2(\mathcal{C})$ σ -algebra izateagatik, $\sigma_1(\mathcal{C}) \subset \sigma_2(\mathcal{C})$. Aldiz, $\sigma_2(\mathcal{C})$ txikiena izateagatik eta $\sigma_1(\mathcal{C})$ σ -algebra izateagatik, $\sigma_2(\mathcal{C}) \subset \sigma_1(\mathcal{C})$. Ondorioz, $\sigma_1(\mathcal{C}) = \sigma_2(\mathcal{C})$ dugu. $\square$

Aurreko emaitzagatik ondorioztatu ahal dugu $\sigma(\mathcal{C})$ existituz gero, bakarra dela. Ondoko emaitzak $\sigma(\mathcal{C})$ -ren existentzia frogatzen du.

1.1.1 Teorema. Demagun $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(\Omega)$. Orduan, $\sigma(\mathcal{C})$ existitzen da eta bakarra da.

Frogapena. Izan bedi $\mathcal{F}_t$ σ -algebra, non $\mathcal{C} \in \mathcal{F}_t$; hau da, $\mathcal{F}_t$ $\mathcal{C}$ barruan duen σ -algebra da. Demagun $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in T}$ dela $\mathcal{C}$ barruan duen σ -algebra guztien familia. Definitu $\sigma(\mathcal{C}) = \bigcap_{t \in T} \mathcal{F}_t$.

Lehendabizi, $\mathcal{C} \subset \sigma(\mathcal{C})$ ematen da, izan ere $\forall t \in T$ $\mathcal{C} \subset \mathcal{F}_t$. Gainera, 1.1.7 Proposizioaren emaitzagatik, $\sigma(\mathcal{C})$ σ -algebra da $\forall t \in T$ $\mathcal{F}_t$ σ -algebra baita. Azkenik, $\mathcal{C}$ barruan duen σ -aljebrarik txikiena dela aurkeztuko dugu. Horretarako, demagun $\mathcal{F}_0$ σ -algebra dela, non $\mathcal{C} \in \mathcal{F}_0$. Orduan, $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in T}$ definizioz, existitzen da $t_0 \in T$ non $\mathcal{F}_{t_0} = \mathcal{F}_0$ eta $\bigcap_{t \in T} \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_0$, beraz, $\sigma(\mathcal{C}) \subset \mathcal{F}_0$; hau da, $\sigma(\mathcal{C})$ σ -aljebrarik txikiena da $\mathcal{C}$ barruan duena. $\square$

Orain, boreldar σ -algebra definituko dugu.

1.1.8 Definizioa. Demagun $\Omega = \mathbb{R}$. Izan bedi $\mathcal{C} = \{(a, b) : -\infty \leq a < b \leq \infty\}$. Orduan, boreldar σ -algebra $\mathbb{R}$ -n $\sigma(\mathcal{C})$ da.

Guk boreldar σ -algebra $\mathbb{R}$ -n β bezala idatziko dugu (batzuk $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ bezala idazten dute). Bestalde, boreldar σ -algebra $\mathbb{R}^n$ -n β^n bezala idatziko dugu (batzuk $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ bezala idazten dute) eta $\mathbb{R}^n$ -ko irekiek sortutako σ aljebrarik txikiena da.

Orain frogatuko dugu β hainbat modutan sortu ahal dela, alegia,

$$\begin{aligned}\sigma((a, b) : -\infty \leq a < b \leq \infty) &= \sigma([a, b] : -\infty \leq a \leq b < \infty) \\ &= \sigma([a, b) : -\infty < a \leq b \leq \infty) \\ &= \sigma([a, b] : -\infty < a \leq b < \infty).\end{aligned}$$

Lehenengo berdintza frogatuko dugu jarraian (besteak antzeko moduan froga daitezke).

1.1.8 Proposizioa. Demagun $\mathcal{C}^0 = \{(a, b) : -\infty \leq a < b \leq \infty\}$ eta $\mathcal{C}^{(1)} = \{(a, b) : -\infty \leq a \leq b < \infty\}$. Orduan $\sigma(\mathcal{C}^0) = \sigma(\mathcal{C}^{(1)})$.

Frogapena. Lehendabizi $\sigma(\mathcal{C}^0) \subset \sigma(\mathcal{C}^{(1)})$ frogatuko dugu. Ohartu

$$(a, b) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(a, b - \frac{1}{n} \right],$$

non $(a, b - \frac{1}{n}] \in \mathcal{C}^{(1)} \subset \sigma(\mathcal{C}^{(1)})$. Beraz, $(a, b) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (a, b - \frac{1}{n}] \in \sigma(\mathcal{C}^{(1)})$ frogatu dugu, hau da, $\mathcal{C}^0 \subset \sigma(\mathcal{C}^{(1)})$. Orain, 1.1.7 Definizioa kontuan hartuz, $\sigma(\mathcal{C}^0) \subset \sigma(\mathcal{C}^{(1)})$.

Orain, $\sigma(\mathcal{C}^{(1)}) \subset \sigma(\mathcal{C}^0)$ frogatuko dugu. Ohartu

$$(a, b] = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(a, b + \frac{1}{n} \right),$$

non $(a, b + \frac{1}{n}) \in \mathcal{C}^0 \subset \sigma(\mathcal{C}^0)$. Beraz, $(a, b] \in \sigma(\mathcal{C}^0)$ frogatu dugu. Orain, 1.1.7 Definizioa kontuan hartuz, $\sigma(\mathcal{C}^{(1)}) \subset \sigma(\mathcal{C}^0)$. $\square$

1.2 Probabilitate Espazioak

1.2.1 Oinarritzko Definizioak eta Propietateak

$(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ probabilitate-espazioa ondoko elementuz osaturiko hirukotea da:

- Ω : lagin espazioa
- $\mathcal{B}$: Ω -ren σ -algebra
- $\mathbb{P}$: probabilitate neurria $(\Omega, \mathcal{B})$ espazio neurgarrian.

Gogoratu $\mathbb{P}$ probabilitate neurria dela $(\Omega, \mathcal{B})$ espazio neurgarrian ondokoa betetzen bada:

$$\mathbb{P} : \mathcal{B} \rightarrow [0, 1]$$

$$A \rightarrow \mathbb{P}(A)$$

non Kolmogorov-en axiomak betetzen diren:

- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
- $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{B}$ eta binaka baterazinak badira, orduan

$$\mathbb{P} \left(\bigcup_{n \geq 1} A_n \right) = \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(A_n)$$

Orain, oinarritzko probabilitateko zenbait propietate gogoratuko ditugu:

- $\mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$, $\forall A \in \mathcal{B}$.
- $A, B \in \mathcal{B}$ badira, orduan $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.
- Barne-kanpo Printzipioa: $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{B}$ badira,

$$\mathbb{P} \left(\bigcup_{j=1}^n A_j \right) = \sum_{j=1}^n \mathbb{P}(A_j) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathbb{P}(A_i \cap A_j) + \dots + (-1)^{n+1} \mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_n).$$

- Monotonia legea: $A, B \in \mathcal{B}$ badira, orduan $A \subset B \Rightarrow \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$.
- Azpi Batukortasun Zenbakigarria: $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{B}$ badira, orduan

$$\mathbb{P} \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_j).$$

- Jarraitutasuna: Izan bedi $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{B}$
 Goi-Jarraitutasuna: $A_n \uparrow$ bada eta $A = \bigcup_{i \geq 1} A_i = A$, $\lim \uparrow \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(A)$,
 Behe-Jarraitutasuna: $A_n \downarrow$ bada eta $A = \bigcap_{i \geq 1} A_i = A$, $\lim \downarrow \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(A)$.

Ondoko emaitza frogatuko dugu.

1.2.1 Proposizioa. Demagun $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{B}$. Orduan,

$$\mathbb{P} \left(\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n \right) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A_n) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A_n) \leq \mathbb{P} \left(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n \right).$$

Frogapena. Oinarrizko kalkuluko emaitzengatik, badakigu x_n balio errealeen segida bada, orduan $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$. Hori dela eta, beste bi ezberdintzak frogatuko ditugu. Lehenengo ezberdintzarekin hasiko gara. Ohartu $\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k \geq n} A_k$ eta beraz

$$\mathbb{P} \left(\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n \right) = \mathbb{P} \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k \geq n} A_k \right),$$

eta $\bigcap_{k \geq n} A_k$ ez beherakorra denez, probabilitatearen goi-jarraitutasun propietateagatik ondokoa ematen da:

$$\mathbb{P} \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k \geq n} A_k \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(\bigcap_{k \geq n} A_k \right).$$

Orain, ohartu edozein $t \geq n$ -rako $A_t \supset \bigcap_{k \geq n} A_k$ dela, beraz, $\mathbb{P}(A_t) \geq \mathbb{P}(\bigcap_{k \geq n} A_k)$. Ondorioz, $\inf_{k \geq n} \mathbb{P}(A_k) \geq \mathbb{P}(\bigcap_{k \geq n} A_k)$ eta, horregatik,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(\bigcap_{k \geq n} A_k \right) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{k \geq n} \mathbb{P}(A_k).$$

Eta $\liminf$ -en definizioaren ondorioz, $\mathbb{P}(\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A_n)$ frogatu dugu.

Bukatzeko, falta den ezberdintza frogatuko dugu. Ohartu $\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k \geq n} A_k$ eta beraz

$$\mathbb{P} \left(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n \right) = \mathbb{P} \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k \geq n} A_k \right).$$

Orain, konturatuko gara $\bigcup_{k \geq n} A_k$ ez gorakorra dela, hau da, $\bigcup_{k \geq n} A_k \downarrow$, beraz probabilitatearen behe-jarraitutasunaren propietateagatik

$$\mathbb{P} \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k \geq n} A_k \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(\bigcup_{k \geq n} A_k \right).$$

Orain, ohartu edozein $t \geq n$ -rako $A_t \subset \bigcup_{k \geq n} A_k$ dela, beraz, $\mathbb{P}(A_t) \leq \mathbb{P}(\bigcup_{k \geq n} A_k)$. Ondorioz, $\sup_{k \geq n} \mathbb{P}(A_k) \leq \mathbb{P}(\bigcup_{k \geq n} A_k)$ eta, horregatik,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(\bigcup_{k \geq n} A_k \right) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{k \geq n} \mathbb{P}(A_k).$$

Eta $\limsup$ -en definizioaren ondorioz, $\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A_n) \leq \mathbb{P}(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n)$ frogatu dugu. $\square$

Goiko emaitzaren ondorioz, ondokoa lortzen dugu.

1.2.1 Korolaria. Demagun $A, A_1, A_2, \dots \in \mathcal{B}$, non $A_n \rightarrow A$. Orduan, $\mathbb{P}(A_n) \rightarrow \mathbb{P}(A)$.

Frogapena. $A_n \rightarrow A$ bada, orduan $\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n = A$ eta beraz,

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}\left(\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n\right) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A_n) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A_n) \leq \mathbb{P}\left(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n\right) = \mathbb{P}(A).$$

Ondorioz, goiko ezberdintzak berdintzak dira eta, horregatik,

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A_n) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(A).$$

□

1.2.2 Dynkin-en Teorema

Lehendabizi, π -sistemak eta λ -sistemak definituko ditugu.

1.2.1 Definizioa. Izan bedi $\mathcal{P} \subset \mathcal{P}(\Omega)$. Orduan, $\mathcal{P}$ π -sistema da itxia bada 6 eragiketarako, hau da,

$$A, B \in \mathcal{P} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{P}.$$

1.2.2 Definizioa. Izan bedi $\mathcal{L} \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$. Orduan, $\mathcal{L}$ λ -sistema da postulatu zaharrak edo berriak betetzen baditu, postulatu zaharrak ondokoak izanik:

Z1) $\Omega \in \mathcal{L}$.

Z2) $A, B \in \mathcal{L}$, non $A \subset B$, orduan $B - A \in \mathcal{L}$.

Z3) $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{L}$ eta $A_i \uparrow i = 1, 2, \dots$, orduan $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{L}$.

Eta postulatu berriak ondokoak dira:

B1) $\Omega \in \mathcal{L}$.

B2) $A \in \mathcal{L}$, orduan $\bar{A} \in \mathcal{L}$.

B3) $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{L}$ eta $A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i, j$, orduan $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{L}$.

1.2.1 Oharra. Frogatu daiteke postulatu zaharrak eta berriak baliokideak direla. Orain, frogatuko dugu postulatu zaharrak betetzen badira, berriak ere. Lehendabizi, Z1) eta B1) berdina dira. Orain, B2) frogatuko dugu, hau da, $A \in \mathcal{L}$, orduan $\bar{A} \in \mathcal{L}$. Z2) dela eta, badakigu $A, B \in \mathcal{L}$ non $A \subset B$ den, orduan $B - A \in \mathcal{L}$. Hartu $B = \Omega$ eta orduan $A \subset B$ dugu eta $B - A = \bar{A}$ dugunez, $\bar{A} \in \mathcal{L}$.

Bukatzeko, B3) frogatuko dugu. Lehendabizi, ondoko propietatea frogatuko dugu: $A, B \in \mathcal{L}$ eta $A \cap B = \emptyset$, orduan $A \cup B \in \mathcal{L}$. Hasteko, $A \cap B = \emptyset$ dugunez, orduan $B \subset \bar{A}$ eta, Z2) erabiliz, $\bar{A} - B \in \mathcal{L}$. Orain, De Morgan-en Legeak erabiliz,

$$\bar{A} - B = \bar{A} \cap \bar{B} = \overline{A \cup B},$$

beraz $\overline{A \cup B} \in \mathcal{L}$ eta Z2) erabiliz, $A \cup B \in \mathcal{L}$ dugu. Arrazonamendu berdinarekin $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{L}$ badira, orduan $\cup_{i=1}^n A_i \in \mathcal{L}$. Orain, B3) frogatuko dugu. Definitu $B_n = \cup_{i=1}^n A_i$; frogatu dugu $B_n \in \mathcal{L}$ eta gainera, $B_n \subset B_{n+1}$ ematen da; ondorioz, Z3) erabiliz, $\cup_{i=1}^\infty B_i \in \mathcal{L}$. Frogapena bukatzen da ohartuz $\cup_{i=1}^\infty B_i = \cup_{i=1}^\infty A_i$.

Orain, ondoko emaitza frogatuko dugu.

1.2.2 Proposizioa. Edozein σ -algebra λ -sistema da.

Frogapena. B1) eta B2) σ -aljebraren definizioaren lehenengo bi propietateen berdinak dira (ikusi 1.1.5 Proposizioa). Aldiz, B3) ere betetzen da σ -aljebraren definizioaren hirugarren propietatea betetzen denean (izan ere, edozein segidarako betetzen bada propietate hori, edozein segidarako non gertaerak binaka bateraezinak diren ere bai). $\square$

Aurrean, $\mathcal{C}$ -k sortutako σ -aljebrarik txikiena definitu dugun antzeko moduan, $\mathcal{C}$ -k sortutako λ -sistematik txikiena ($\mathcal{L}(\mathcal{C})$ bezala idatziko duguna) eta π -sistematik txikiena ($\mathcal{P}(\mathcal{C})$ bezala idatziko duguna) definitzen dira. Esate baterako, $\mathcal{L}(\mathcal{C})$ $\mathcal{C}$ -k sortutako λ -sistematik txikiena izango da, ondokoak betetzen badira:

- $\mathcal{C} \subset \mathcal{L}(\mathcal{C})$
- $\mathcal{L}'$ beste λ -sistema bada non $\mathcal{C} \subset \mathcal{L}'$, orduan $\mathcal{L}(\mathcal{C}) \subset \mathcal{L}'$.

Gainera, $\lambda(\mathcal{C})$ eta $\mathcal{P}(\mathcal{C})$ hauen existentzia eta bakartasunaren froga σ -aljebrarik txikiaren antzekoa da eta, beraz, ez ditugu hemen aurkeztuko.

Orain, ondoko proposizioa frogatuko dugu.

1.2.3 Proposizioa. Izan bedi $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(\Omega)$. Orduan $\mathcal{C}$ λ -sistema eta π -sistema bada, σ -algebra da.

Frogapena. Lehenik, $\mathcal{C}$ λ -sistema denez, 1.1.5 Proposizioaren lehenengo bi propietateak betetzen direla ohartuko gara (izan ere, 1.2.2 Definiizioko B1) eta B2) propietateen berdinak dira). Bukatzeko, ondokoa frogatuko dugu: $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{C}$ bada, orduan $\cup_{i \geq 1} A_i \in \mathcal{C}$. Badakigu, $\mathcal{C}$ λ -sistema izateagatik $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{C}$ bada, orduan $\bar{A}_1, \dots, \bar{A}_n \in \mathcal{C}$ dela (ikusi 1.2.2 Definiizioko B2) propietatea). Orain, $\mathcal{C}$ π -sistema denez, $\bar{A}_1, \dots, \bar{A}_n \in \mathcal{C}$ bada, orduan $\cap_{i=1}^n \bar{A}_i \in \mathcal{C}$ ematen da. Beraz, De Morgan-en Legeak erabiliz, $\overline{\cup_{i=1}^n A_i} \in \mathcal{C}$ eta berriz 1.2.2 Definiizioko B2) propietatea erabiliz, $\cup_{i=1}^n A_i \in \mathcal{C}$ lortzen dugu.

Frogapena bukatuko dugu $B_n = \cup_{i=1}^n A_i$ definituz. Ohartu, edozein $n \in \mathbb{N}$ -rako, $B_n \in \mathcal{C}$ dela eta ez beherakorra ere bai. Orduan, Z3) erabiliz, $\cup_{i=1}^\infty B_n \in \mathcal{C}$ ematen da eta $\cup_{i=1}^\infty B_n = \cup_{i=1}^\infty A_n$ ematen dela konturatuz, frogapena bukatu da. $\square$

Goiko emaitza erabiliz, ondokoa frogatu daiteke (teorema honen frogapena 1.3.1 atalean ageri da).

1.2.1 Teorema (Dynkin-en Teorema). $\mathcal{P}$ π -sistema eta $\mathcal{L}$ λ -sistema badira non $\mathcal{P} \subset \mathcal{L}$, orduan $\sigma(\mathcal{P}) \subset \mathcal{L}$.

Dynkin-en Teoremaren ondorioz, ondoko emaitza lortzen dugu.

1.2.2 Korolaria. $\mathcal{P}$ π -sistema bada, orduan $\sigma(\mathcal{P}) = \mathcal{L}(\mathcal{P})$.

Frogapena. Demagun $\mathcal{P}$ π -sistema dela. Orduan, $\mathcal{L}(\mathcal{P})$ λ -sistema da eta $\mathcal{P} \subset \mathcal{L}(\mathcal{P})$ ematen da, beraz Dynkin-en Teorema aplikatuz, $\sigma(\mathcal{P}) \subset \mathcal{L}(\mathcal{P})$ ematen da. Aldiz, $\sigma(\mathcal{P})$ σ -algebra da eta, beraz, λ -sistema da (ikusi 1.2.2 Proposizioa). Gainera, $\mathcal{P} \subset \sigma(\mathcal{P})$ dugu eta, λ -sistema txikienaren definizioaren ondorioz, $\mathcal{L}(\mathcal{P}) \subset \sigma(\mathcal{P})$ ematen da. $\square$

Goiko emaitzak dioena zera da: $\mathcal{P}$ π -sistema izatekotan, $\mathcal{P}$ -ren σ -aljebrarik txikiena eta $\mathcal{P}$ -ren λ -sistemarik txikiena berdinak direla.

1.2.3 Aplikazioak

Orain, Dynkin-en Teoremaren bi aplikazio interesgarri deskribatuko ditugu. Lehenengoa aurkeztu aurretik, ondoko emaitza aurkeztuko dugu:

1.2.1 Lema. $\mathbb{P}_1$ eta $\mathbb{P}_2$ $(\Omega, \mathcal{B})$ espazio neurgarriaren probabilitate-neurriak direla suposatuz. Orduan, ondoko funtzioa λ -sistema da

$$\mathcal{L} = \{A \in \mathcal{B} : \mathbb{P}_1(A) = \mathbb{P}_2(A)\}$$

Frogapena. Postulatu berriak erabiliz frogatuko dugu $\mathcal{L}$ λ -sistema dela.

B1) $\Omega \in \mathcal{L}$, izan ere $\mathbb{P}_1(\Omega) = \mathbb{P}_2(\Omega) = 1$

B2) Suposatu $A \in \mathcal{L}$. Orduan, $\mathbb{P}_1(A) = \mathbb{P}_2(A)$. Probabilitate neurriak izateagatik, $1 - \mathbb{P}_1(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}_2(\bar{A})$ eta, horren ondorioz, $\mathbb{P}_1(\bar{A}) = \mathbb{P}_2(\bar{A})$; hau da $\bar{A} \in \mathcal{L}$.

B3) Suposatu $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{L}$ non $A_i \cap A_j = \emptyset \ \forall i \neq j$. Beraz, $\forall i = 1, 2, \dots$, $\mathbb{P}_1(A_i) = \mathbb{P}_2(A_i)$ eta, horregatik, $\sum_{i \geq 1} \mathbb{P}_1(A_i) = \sum_{i \geq 1} \mathbb{P}_2(A_i)$. Probabilitate neurriak izateagatik, $\sum_{i \geq 1} \mathbb{P}_1(A_i) = \mathbb{P}_1\left(\bigcup_{i \geq 1} A_i\right)$ eta $\sum_{i \geq 1} \mathbb{P}_2(A_i) = \mathbb{P}_2\left(\bigcup_{i \geq 1} A_i\right)$. Horregatik, $\mathbb{P}_1\left(\bigcup_{i \geq 1} A_i\right) = \mathbb{P}_2\left(\bigcup_{i \geq 1} A_i\right)$ eta, ondorioz, $\bigcup_{i \geq 1} A_i \in \mathcal{L}$.

$\square$

Orain, lehenengo aplikazioarekin hasiko gara.

1.2.4 Proposizioa. $\mathbb{P}_1$ eta $\mathbb{P}_2$ $(\Omega, \mathcal{B})$ espazio neurgarriaren probabilitate-neurriak direla suposatuz. $\mathcal{P}$ π -sistema bada non $\forall A \in \mathcal{P}, \mathbb{P}_1(A) = \mathbb{P}_2(A)$, orduan

$$\forall B \in \sigma(\mathcal{P}), \mathbb{P}_1(B) = \mathbb{P}_2(B).$$

Frogapena. Emaitza frogatutzat jo ahal dugu $\sigma(\mathcal{P}) \subset \mathcal{L}$ frogatuz gero. 1.2.1 Lemagatik, badakigu $\mathcal{L} = \{A \in \mathcal{B} : \mathbb{P}_1(A) = \mathbb{P}_2(A)\}$ λ -sistema dela. Gure hipotesiei erreparatuz, honakoa dugula ohartzen gara: $\mathcal{P} \subset \mathcal{L}$. Dynkin-en Teoremaren baldintzak betetzen direla argi ikusten da. Beraz, Dynkin-en Teorema aplikatuz, $\sigma(\mathcal{P}) \subset \mathcal{L}$ lortzen dugu. $\square$

Goiko emaitzak dioena zera da: bi probabilitate neurri berdinki banatuak izatearen propietatea $\mathcal{P}$ multzotik $\sigma(\mathcal{P})$ -ra heda daitekela.

Bigarren aplikazioak banaketa funtzioarekin zerikusia du. Gogoratu edozein x errealerako $F(x) = \mathbb{P}((-\infty, x])$ dela. Gogoratu ere β boreldar σ -algebra $\mathbb{R}$ -n dela.

1.2.5 Proposizioa. *Izan bedi $\Omega = \mathbb{R}$. Suposatu $\mathbb{P}_1$ eta $\mathbb{P}_2$ probabilitate-neurriak direla $(\mathbb{R}, \beta)$ espazioan eta haien banaketa funtzioak berdinak direla, hau da,*

$$\forall x \in \mathbb{R} : F_1(x) = \mathbb{P}_1((-\infty, x]) = F_2(x) = \mathbb{P}_2((-\infty, x]).$$

Orduan, $\mathbb{P}_1(B) = \mathbb{P}_2(B)$ ematen da $\forall B \in \beta$ -rako.

Frogapena. Definitu $\mathcal{P} = (-\infty, x]$. Aurkeztuko dugu $\mathcal{P}$ π -sistema dela, izan ere

$$(-\infty, x] \cap (-\infty, y] = (-\infty, \min(x, y)].$$

1.2.1 Lemagatik, badakigu $\mathcal{L} = \{A \in \mathcal{B} : \mathbb{P}_1(A) = \mathbb{P}_2(A)\}$ λ -sistema dela. Gainera, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}_1((-\infty, x]) = \mathbb{P}_2((-\infty, x])$ denez, orduan $\mathcal{P} \subset \mathcal{L}$. Beraz, Dynkin-en Teorema aplikatu ahal dugu eta, hori eginda, $\sigma(\mathcal{P}) \subset \mathcal{L}$ lortzen dugu. Bukatzeko, ohartu $\sigma(\mathcal{P}) = \beta$ (Boreldar σ -algebra $(-\infty, x]$ bezalako tarteek sortutako σ -algebra da). Beraz, $\mathbb{P}_1(B) = \mathbb{P}_2(B)$ ematen da $\forall B \in \beta$ -rako. $\square$

Aurreko emaitzaren arabera, ondokoa ondorioztatu ahal dugu: banaketa-funtzioak probabilitate-banaketa definitzen du.

1.3 Frogapenak

1.3.1 Dynkin-en Teoremaren frogapena

Teorema hau frogatzeko, ondoko lema erabiliko dugu.

1.3.1 Lemma. *Izan bedi $\mathcal{P}$ π -sistema eta $S \in \mathcal{L}(\mathcal{P})$. Definitu*

$$\mathcal{M}(S) := \{A \in \mathcal{L}(\mathcal{P}) : A \cap S \in \mathcal{L}(\mathcal{P})\}.$$

Orduan $\mathcal{M}(S)$ λ -sistema da.

Frogapena. λ -sistemaren postulatu berriak betetzen direla frogatuko dugu:

- $\Omega \in \mathcal{M}(S)$ da; izan ere, $\Omega \in \mathcal{L}(\mathcal{P})$ izateagatik eta, gainera, $\Omega \cap S = S \in \mathcal{L}(\mathcal{P})$.
- $A \in \mathcal{M}(S) \Rightarrow \bar{A} \in \mathcal{M}(S)$ egia dela frogatuko dugu. Lehendabizi, $\bar{A} \in \mathcal{L}(\mathcal{P})$ $\mathcal{L}(\mathcal{P})$ λ -sistema izateagatik (bigarren postulatu berria). Orain, $S \cap \bar{A} \in \mathcal{L}(\mathcal{P})$ frogatuko dugu. Badakigu, $A \cap S \subset S \in \mathcal{L}(\mathcal{P})$ eta beraz, bigarren postulatu zaharragatik, $S - (A \cap S) \in \mathcal{L}(\mathcal{P})$. Horrela,

$$S - (A \cap S) = S \cap (\bar{A} \cup \bar{S}) = (S \cap \bar{A}) \cup (S \cap \bar{S}) = S \cap \bar{A}.$$

Beraz, $S \cap \bar{A} \in \mathcal{L}(\mathcal{P})$.

- Demagun $A_n \in \mathcal{M}(S)$ non $A_i \cap A_j = \emptyset$, $\forall i \neq j$, orduan $\mathcal{L}(\mathcal{P})$ λ -sistema denez, badakigu hirugarren postulatu berriagatik $\cup_{n \geq 1} A_n \in \mathcal{L}(\mathcal{P})$. Gainera, $S \cap \cup_{n \geq 1} A_n \in \mathcal{L}(\mathcal{P})$ betetzen dela frogatuko dugu. Ohartu

$$\left(\bigcup_{n \geq 1} A_n \right) \cap S = \bigcup_{n \geq 1} (A_n \cap S),$$

eta eskuinekoa $\mathcal{L}(\mathcal{P})$ -n dago hirugarren postulatu berriagatik (ohartu $A_n \cap S \in \mathcal{L}(\mathcal{P})$ edozein n -rako eta $(A_i \cap S) \cap (A_j \cap S) = \emptyset$, $\forall i \neq j$, $A_i \neq A_j \neq \emptyset$ izateagatik).

□

Dynkin-en Teoremaren frogapena. Nahi dugun emaitza frogatzeko, 1.2.3 Proposizioko emaitzagatik, nahikoa da $\mathcal{L}(\mathcal{P})$ λ -sistema eta π -sistema dela frogatzea. Izan ere, $\mathcal{L}(\mathcal{P})$ λ -sistema eta π -sistema bada, orduan $\mathcal{L}(\mathcal{P})$ σ -algebra da eta, ondorioz, σ -aljebrarik txikienaren definizioaren ondorioz, $\sigma(\mathcal{P}) \subset \mathcal{L}(\mathcal{P})$ dugu. Gainera, $\mathcal{P} \subset \mathcal{L}$ betetzen da hipotesiz eta, beraz, λ -sistematik txikienaren definizioaren ondorioz, $\mathcal{L}(\mathcal{P}) \subset \mathcal{L}$. Horregatik, $\sigma(\mathcal{P}) \subset \mathcal{L}$ frogatu dugu, eta hori da frogatu nahi genuena.

Horrela, frogatuko dugu $\mathcal{L}(\mathcal{P})$ π -sistema dela, hau da,

$$A, B \in \mathcal{L}(\mathcal{P}) \implies A \cap B \in \mathcal{L}(\mathcal{P}).$$

Hartu $S \in \mathcal{P}$. Horrela, $\mathcal{P} \subset \mathcal{L}(\mathcal{P})$ denez, aurreko lemagatik, badakigu $\mathcal{M}(S)$ λ -sistema dela.

Ikus dezagun $\mathcal{P} \subset \mathcal{M}(S)$. Hartu $A \in \mathcal{P}$, kontuan hartuta $\mathcal{P}$ π -sistema dela $A \cap S \in \mathcal{P}$ dugu eta, berriz, $\mathcal{P} \subset \mathcal{L}(\mathcal{P})$ izateagatik, $A \cap S \in \mathcal{L}(\mathcal{P})$ dugu. Beraz $A \in \mathcal{M}(S)$.

Ondorioz, $\mathcal{M}(S)$ λ -sistema da eta $\mathcal{P} \subset \mathcal{M}(S)$ ematen da. Horregatik, $\mathcal{L}(\mathcal{P}) \subset \mathcal{M}(S)$. Hau da:

$$S \in \mathcal{P}, B \in \mathcal{L}(\mathcal{P}) \implies B \cap S \in \mathcal{L}(\mathcal{P}). \quad (1.3)$$

Hartu orain edozein $B \in \mathcal{L}(\mathcal{P})$ eta definitu

$$\mathcal{M}(B) = \{A \in \mathcal{L}(\mathcal{P}) : A \cap B \in \mathcal{L}(\mathcal{P})\}.$$

Aurreko lemaren arabera, $\mathcal{M}(B)$ λ -sistema da. Gainera, $\mathcal{P} \subset \mathcal{M}(B)$ ematen da. Hori ikusteko, $A \in \mathcal{P}$ hartu eta (1.3) aplikatzen da $S = A \in \mathcal{P}$ -rekin eta $B \in \mathcal{L}(\mathcal{P})$ -rekin, eta lortzen da $B \cap A \in \mathcal{L}(\mathcal{P})$, hau da, $A \cap B \in \mathcal{L}(\mathcal{P})$.

Beraz, $\mathcal{M}(B)$ λ -sistema da eta $\mathcal{P}$ barne hartzen du, beraz $\mathcal{L}(\mathcal{P}) \subset \mathcal{M}(B)$. Horrela, frogatu dugu, $A, B \in \mathcal{L}(\mathcal{P})$ bada, orduan $A \cap B \in \mathcal{L}(\mathcal{P})$. Eta hori da frogatu nahi genuena, alegia $\mathcal{L}(\mathcal{P})$ π -sistema dela. □

1.4 Ariketak

1.4.1 Ariketa. Ondoko segida definitu: $A_n = \left(\frac{-1}{n}, 1\right]$, n bakoitia bada eta $A_n = \left(-1, \frac{1}{n}\right]$ n bikoitia bada. Kalkulatu $\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n$ eta $\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n$.

1.4.2 Ariketa. Ondoko segidak definitu: $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$, non $A_n = (-n, n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$ eta $\{B_n : n \in \mathbb{N}\}$, non $B_n = \left(\frac{-1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right)$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Kalkulatu haien limiteak

1.4.3 Ariketa. Izan bedi $A_n = \left(-3 - \frac{1}{n}, 2\right]$, n bikoitia bada, eta $A_n = \left[-2, 3 + \frac{1}{n}\right)$, n bakoitia bada. Kalkulatu $\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n$ eta $\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n$. Existitzen da limitea?

1.4.4 Ariketa. Ondoko gertaera-segidaren limitea existitzen den aztertu: $\{A_n : n \geq 2\}$, non $A_n = [0, a_n)$,

$$a_n = 2 + (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right), n \geq 2.$$

1.4.5 Ariketa. Ondokoa frogatu:

$$\mathcal{C} = \sigma(\mathcal{C}) \iff \mathcal{C} \text{ } \sigma\text{-algebra da.}$$

1.4.6 Ariketa. Demagun $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ eta $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ direla, non $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}$. Orduan $\sigma(\mathcal{C}) \subset \sigma(\mathcal{D})$.

1.4.7 Ariketa. Izan bedi $\mathcal{B}$ σ -algebra bat. Postulatu zaharrak erabiliz, frogatu $\mathcal{B}$ λ -sistema dela.

1.4.8 Ariketa. Ondoko adierazpena egiazkoa dela frogatu:

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) \geq 1 - n + \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i).$$

1.4.9 Ariketa. $\{A_i, i = 1, 2, \dots, n\} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ bada, orduan

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \leq \min_{k \in \{1, \dots, n\}} \left\{ \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i) - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n \mathbb{P}(A_i \cap A_k) \right\}.$$

2

Zorizko Aldagaiak

Zorizko aldagaien ideia intuikorrarekin hasiko gara. Izan ere, zorizko aldagai bat Ω -tik $\mathbb{R}$ -ra doan aplikazio bat da. Aplikazio honi neurgarritasun propietatea eskatuko zaio; izan ere, horri esker baieztapenak egin ahal izango ditugu.

Sarrera moduan, ondoko adibidea azalduko dugu:

2.0.1 Adibidea. *Demagun n aldiz esperimentu bat egiten duguna eta esperimentu hori arrakastatsua izango da edo ez. Suposatu edozein alditan lortutako emaitzak ez duela eraginik beste esperimentuetan (esperimentu independenteak direla). Horrela, $\Omega = \{0, 1\}^n$, non 0-k porrota adierazten duen eta 1-ek arrakasta. Aztertu nahi dugu zein den arrakasta kopurua. Definituko dugu X arrakasta kopurua neurtzen duen zorizko aldagaia, era honetan*

$$X(\omega_1, \dots, \omega_n) = \omega_1 + \dots + \omega_n.$$

2.1 Alderantzizko Aplikazioak

Oinarrizko probabilitateko liburuetan zorizko aldagaiak aurkezten dira. Aldiz, liburu honetan ikuspegi orokor batean zentratuko gara. Izan ere, suposatuko dugu Ω eta Ω' bi multzo direla, Ω' orokorra izan daitekeelarik (izan daiteke $\mathbb{R}$, $\mathbb{N}$ edo $\{0, 1\}$). Horrela, $X : \Omega \rightarrow \Omega'$ aplikazio bat dela kontzideratuko dugu, Ω' X -ren barrutia (edo helburu-multzoa) izanik eta Ω X -ren eremua. Orain, alderantzizko aplikazioa definituko dugu.

2.1.1 Definizioa. *Izan bedi $A' \subset \Omega'$.*

$$X^{-1} : \mathcal{P}(\Omega') \rightarrow \mathcal{P}(\Omega)$$

$$A' \rightarrow X^{-1}(A') = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A'\}$$

Horrela, goiko definizioa multzoen familietara heldatzen da, ondoko eran: $\mathcal{C}' \subset \mathcal{P}(\Omega')$ bada,

$$X^{-1}(\mathcal{C}') = \{X^{-1}(C') : C' \in \mathcal{C}'\}$$

2.1.1 Oharra. *Ohartu Ω' -ren barruko familia multzoek $\mathcal{C}'$ bezala idatziko ditugula (hau da, prima hori jarriko dugu) eta multzoetarako A' . Aldiz, Ω -ri buruz ariko garenean, ez dutela primarik erabiliko, hau da, A eta $\mathcal{C}$ izango dira.*

Jarraian, alderantzizko aplikazioen propietate batzuk frogatuko ditugu:

1. $X^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ eta $X^{-1}(\Omega') = \Omega$.

Frogapena:

$$X^{-1}(\emptyset) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in \emptyset\} = \emptyset.$$

$$X^{-1}(\Omega') = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in \Omega'\} = \Omega.$$

2. Kontrakotasuna mantentzen du: $A' \subset \Omega'$ bada, $X^{-1}(\overline{A'}) = \overline{X^{-1}(A')}$.

Frogapena:

$$\omega \in X^{-1}(\overline{A'}) \iff X(\omega) \in \overline{A'} \iff X(\omega) \notin A' \iff \omega \notin X^{-1}(A')$$

$$\iff \omega \in \overline{X^{-1}(A')}$$

3. Bildura arbitrarioa mantentzen du: $\{A'_t : t \in T\}$ eta $t \in T$ guztirako $A'_t \subset \Omega'$ badira,

$$X^{-1}\left(\bigcup_{t \in T} A'_t\right) = \bigcup_{t \in T} X^{-1}(A'_t).$$

Frogapena:

$$\omega \in X^{-1}\left(\bigcup_{t \in T} A'_t\right) \iff X(\omega) \in \bigcup_{t \in T} A'_t \iff \exists t \in T \text{ non } X(\omega) \in A'_t$$

$$\omega \in \bigcup_{t \in T} X^{-1}(A'_t) \iff \exists t \in T \text{ non } \omega \in X^{-1}(A'_t) \iff \exists t \in T \text{ non } X(\omega) \in A'_t$$

4. Ebakidura arbitrarioa mantentzen du: $\{A'_t : t \in T\}$ eta $t \in T$ guztirako $A'_t \subset \Omega'$ badira,

$$X^{-1}\left(\bigcap_{t \in T} A'_t\right) = \bigcap_{t \in T} X^{-1}(A'_t).$$

Frogapena: Aurreko propietatearen antzeko moduan egiten da.

Ondoko emaitzan frogatuko dugu σ -algebra bati alderantzizkoa aplikatuz σ -algebra bat izango dugula.

2.1.1 Proposizioa. $\mathcal{B}'$ σ -algebra bada Ω' -rako, orduan $X^{-1}(\mathcal{B}')$ σ -algebra izango da Ω -rako.

Frogapena. Frogatuko dugu $X^{-1}(\mathcal{B})$ itxia dela kontraktasunerako, bildura zenbakigarrietarako eta ebakidura zenbakigarrietarako.

- Kontraktasuna. Badakigu, $A' \in \mathcal{B}'$ bada, orduan $\overline{A'} \in \mathcal{B}'$ egia dela $\mathcal{B}'$ σ -algebra delako Ω' -rako. Beraz, frogatu nahi duguna ondokoa da: $X^{-1}(A') \in X^{-1}(\mathcal{B}')$ bada, orduan $\overline{X^{-1}(A')} \in X^{-1}(\mathcal{B}')$ ematen da. Alderantzizko aplikazioen propietateetatik, badakigu $\overline{X^{-1}(A')} = X^{-1}(\overline{A'})$ egia dela, beraz frogatu behar duguna da $X^{-1}(\overline{A'}) \in X^{-1}(\mathcal{B}')$ eta hau frogatzeko nahikoa da $\overline{A'} \in \mathcal{B}'$ egia dela frogatzea. Orain, lehen esan dugun bezala, azken propietate hau betetzen da $\mathcal{B}'$ σ -algebra izateagatik Ω' -rako.
- Bildura zenbakigarria. Badakigu $A'_1, A'_2, \dots \in \mathcal{B}'$ badira orduan $\cup_{n \geq 1} A'_n \in \mathcal{B}'$ ematen dela. Orain, frogatu nahi duguna ondokoa da: $X^{-1}(A'_n) \in X^{-1}(\mathcal{B}')$ egia bada edozein n -rako, orduan $\cup_{n \geq 1} X^{-1}(A'_n) \in X^{-1}(\mathcal{B}')$ ematen dela. Alderantzizko aplikazioen propietateengatik, badakigu

$$X^{-1}\left(\bigcup_{n \geq 1} A'_n\right) = \bigcup_{n \geq 1} X^{-1}(A'_n),$$

egia dela. Horregatik, nahikoa da frogatzea

$$X^{-1}\left(\bigcup_{n \geq 1} A'_n\right) \in X^{-1}(\mathcal{B}'),$$

eta hori betetzen da $\cup_{n \geq 1} A'_n \in X^{-1}(\mathcal{B}')$ egia bada. Bukatzeko, lehen esan bezala, azken propietate hau egia da $\mathcal{B}'$ σ -algebra izateagatik.

- Ebakidura zenbakigarria. Aurreko kasuaren antzeko moduan frogatu ahal da.

□

Badakigu $\mathcal{C}' \subset \mathcal{P}(\Omega')$ bada, orduan $\sigma(\mathcal{C}')$ σ -algebra dela Ω' -rako eta, goiko emaitzatik, $X^{-1}(\sigma(\mathcal{C}'))$ σ -algebra dela Ω -rako. Hurrengo emaitzan σ -algebra hori karakterizatuko dugu goiko emaitza erabiliz. Frogapena 2.6.1 atalean aurkitu daiteke.

2.1.2 Proposizioa. $\mathcal{C}' \subset \mathcal{P}(\Omega')$ bada, orduan $X^{-1}(\sigma(\mathcal{C}')) = \sigma(X^{-1}(\mathcal{C}'))$.

2.2 Aplikazio Neurgarriak eta Induzitutako Probabilitate Neurriak

Hasiko gara espazio neurgarria definitzen, baita aplikazio neurgarriak ere.

2.2.1 Definizioa. *Espazio neurgarri bat $(\Omega, \mathcal{B})$ bikotea da, non Ω multzo bat eta $\mathcal{B}$ σ -algebra bat Ω -rako diren.*

2.2.2 Definizioa. $(\Omega, \mathcal{B})$ eta $(\Omega', \mathcal{B}')$ espazio neurgarriak badira, orduan ondoko aplikazioa

$$X : \Omega \rightarrow \Omega'$$

neurgarria da baldin eta soilik baldin: $X^{-1}(\mathcal{B}') \subset \mathcal{B}$.

Aplikazio neurgarriei ere zorizko elementu deitzen zaie. Askotan, ondoko notazioa erabiliko dugu $X : \Omega \rightarrow \Omega'$ neurgarria dela adierazteko: $X \in \mathcal{B}/\mathcal{B}'$ edo $X : (\Omega, \mathcal{B}) \rightarrow (\Omega', \mathcal{B}')$. Ohartu neurgarritasuna $\mathcal{B}'$ -ren eta $\mathcal{B}$ -ren arabera dago. Guzti honen kasu partikularra oinarritzko probabilitateko ikastaroetan ikusten da eta, bertan, $(\Omega', \mathcal{B}') = (\mathbb{R}, \beta)$ ematen da.

Beste notazio hau ere erabiliko dugu: $A' \subset \Omega'$ bada,

$$(X \in A') = X^{-1}(A') = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A'\}.$$

Orain, X -k induzitutako probabilitate neurria definituko dugu.

2.2.3 Definizioa. X -k induzitutako probabilitatea $P \circ X^{-1}$ aplikazioa da, hau da, $A' \subset \Omega'$ bada,

$$P \circ X^{-1}(A') = P(X^{-1}(A'))$$

Oinarritzko probabilitateko emaitzen arabera, X zorizko aldagaia denean, $P \circ X^{-1}$ probabilitate neurria dela. Orain, kasu orokor batean gaude $((\Omega', \mathcal{B}') \text{ ez du zertan } (\mathbb{R}, \beta) \text{ izan}),$ baino hala ere frogatu daiteke $P \circ X^{-1}$ probabilitate neurria dela. Hemendik aurrera, hurrengo notazioa erabiliko dugu: $A' \subset \Omega'$ bada, $P(X^{-1}(A')) = P(X \in A')$.

Neurgarritasunak garrantzia handia du teoria honetan. Izan ere, P probabilitate neurria da eta beraz, probabilitateak esleitzen dio $\mathcal{B}$ -ko edozein elementuri. X neurgarria denez, $\forall B' \in \mathcal{B}', X^{-1}(B') \in \mathcal{B}$ eta beraz, probabilitateak esleitzen ditu P -k.

2.2.1 Adibidea. *Dadoa bi aldiz jaurtitzean datzan esperimientua kontuan hartu. X lortutako balioen batura izango da. Deskribatu Ω eta Ω' . Kalkulatu $X^{-1}(\{4\})$ eta $X^{-1}(\{2, 3\})$.*

Ohartu $\Omega = \{(i, j) : 1 \leq i, j \leq 6\}$ eta $\Omega' = \{2, 3, 4, \dots, 11, 12\}$. Gainera $X((i, j)) = i + j$ dugu kasu honetan.

$X^{-1}(\{4\})$ eta $X^{-1}(\{2, 3\})$ kalkulatu ditugu:

$$X^{-1}(\{4\}) = \{\omega \in \Omega : i + j = 4\} = \{(2, 2), (1, 3), (3, 1)\}$$

$$X^{-1}(\{2, 3\}) = \{\omega \in \Omega : i + j = 2 \text{ edo } i + j = 3\} = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1)\}$$

Esan bezala, neurgarritasun propietateak diona zera da: $\mathcal{B}'$ -ko edozein multzori alderantzizko aplikazioa aplikatuz lortutakoa $\mathcal{B}$ σ -aljebrako elementua izan behar da. Egia da hori egiaztatzea zaila izan daitekela zenbait kasutan. Esate baterako, zorizko aldagaien kasuan boreldar elementu guztietarako egiaztatu behar da propietate hori betetzen dela. Horregatik $\mathcal{B}'$ σ -aljebrari buruzko informazioa dugunean, baldintza errazago bat egiaztatzearekin nahikoa dela azalduko dugu jarraian.

2.2.1 Proposizioa. *Suposatu $(\Omega, \mathcal{B})$ eta $(\Omega', \mathcal{B}')$ espazio neurgarriak direla eta $X : \Omega \rightarrow \Omega'$ dela. Suposatu $\mathcal{C}'$ existitzen dela non $\sigma(\mathcal{C}') = \mathcal{B}'$. Orduan, X aplikazio neurgarria da ondokoa betetzen bada:*

$$X^{-1}(\mathcal{C}') \subset \mathcal{B}$$

Frogapena. Suposatu $X^{-1}(\mathcal{C}') \subset \mathcal{B}$, $\mathcal{B}$ σ -algebra izanik. Orduan, σ -aljebrarik txikienaren definizioagatik,

$$\sigma(X^{-1}(\mathcal{C}')) \subset \mathcal{B}.$$

Beraz, $\sigma(\mathcal{C}') = \mathcal{B}'$ denez, $X^{-1}(\mathcal{B}') = X^{-1}(\sigma(\mathcal{C}'))$. Horrela, 2.1.2 Proposizioa erabiliz, $X^{-1}(\sigma(\mathcal{C}')) = \sigma(X^{-1}(\mathcal{C}'))$ dugu eta, beraz, $X^{-1}(\mathcal{B}') = \sigma(X^{-1}(\mathcal{C}')) \subset \mathcal{B}$ dugu, hau da, neurgarritasunaren definizioa betetzen da. $\square$

Zorizko aldagaien kasuan, $(\Omega', \mathcal{B}') = (\mathbb{R}, \beta)$ dugu. Gainera, badakigu $\mathcal{C}' = \{(-\infty, x] : x \in \mathbb{R}\}$ bada, orduan $\sigma(\mathcal{C}') = \beta$ dugu. Ondorioz, ondoko emaitza dugu:

2.2.1 Korolaria. *$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ aplikazioa zorizko aldagaia da ondokoa betetzen bada*

$$X^{-1}((-\infty, x]) \in \mathcal{B}, \forall x \in \mathbb{R},$$

edo beste modu batean esanda

$$(X \leq x) \in \mathcal{B}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Ohartu hau dela oinarritzko probabilitateetako liburuetan agertzen den irizpidea aztertzeke X zorizko aldagaia den ala ez. Orain ikusi duguna da hori egiterakoan aztertzen ari garela X zorizko aldagaia neurgarria den ala ez.

Azken korolaria hau erabiliz, ondoko emaitza frogatu ahal dugu:

2.2.2 Proposizioa. *Izan bedi $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ zorizko aldagaien familia, non edozein n -rako X_n $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ probabilitate espazioan definitutako zorizko aldagaia den. Orduan,*

1. $\min\{X_1, X_2, \dots\}$ eta $\max\{X_1, X_2, \dots\}$ zorizko aldagaiak dira.
2. $\liminf_{n \rightarrow \infty} X_n$ eta $\limsup_{n \rightarrow \infty} X_n$ zorizko aldagaiak dira.
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n$ existitzen bada edozein ω -rako ($\omega \in \Omega$), orduan $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n$ zorizko aldagaia da.

Frogapena. X_n zorizko aldagaia izateagatik, edozein n -rako, badakigu $(X_n \leq x) \in \mathcal{B}$ eta $(X_n > x) \in \mathcal{B}$ edozein $x \in \mathbb{R}$ -rako.

- $\max\{X_1, X_2, \dots\}$. Frogatu nahi dugu $(\max\{X_1, X_2, \dots\} \leq x) \in \mathcal{B}$ ematen dela edozein x errealerako. Ohartu

$$(\max\{X_1, X_2, \dots\} \leq x) = \{\omega \in \Omega : \max\{X_1, X_2, \dots\} \leq x\} = \bigcap_{n \geq 1} \{\omega \in \Omega : X_n \leq x\}.$$

Horrela, lortu dugu frogatzea nahi genuena, izan ere $\{\omega \in \Omega : X_n \leq x\} \in \mathcal{B}$ egia da eta $\mathcal{B}$ σ -algebra izateagatik, itxia da ebakidura zenbakigarrietarako.

- $\min\{X_1, X_2, \dots\}$. Frogatu nahi dugu $(\min\{X_1, X_2, \dots\} > x) \in \mathcal{B}$ ematen dela edozein x errealerako. Horrela, ohartu

$$(\min\{X_1, X_2, \dots\} > x) = \bigcap_{n \geq 1} (X_n > x)$$

ematen dela eta, orduan, frogatu dugu nahi duguna.

- $\liminf$. Kalkuluko emaitza hau kontuan hartuta: $\forall \omega \in \Omega$,

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{k \geq n} X_k(\omega).$$

Aurrean ikusi dugunagatik, $\inf_{k \geq n} X_k$ zorizko aldagaia da, beraz, $\inf_{k \geq n} (X_k > x) \in \mathcal{B}$ edozein n -rako. Beraz, limitea hartuz ere egia da.

- $\limsup$. Aurreko kasuaren antzeko moduan frogatzen da.
- limitea. Kontuan hartuta, limitea existitzekotan, $\liminf$ eta $\limsup$ berdina direla eta biak zorizko aldagaiak direla, limitea ere zorizko aldagaia da.

□

Bestalde, $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ aplikazio bat zorizko bektorea dela aztertzeke baldintza azalduko dugu.

2.2.4 Definizioa. $X = (X_1, \dots, X_n) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ aplikazioa zorizko bektorea da ondokoa betetzen bada

$$(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n) \in \mathcal{B}, \forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^2.$$

2.3 Aplikazioek Sortutako σ -algebra

Demagun $(\Omega, \mathcal{B})$ eta $(\Omega', \mathcal{B}')$ bi espazio neurgarri direla eta $X \in \mathcal{B}/\mathcal{B}'$ dela (hau da, neurgarria). Orain, X zorizko aldagai neurgarriak sortutako σ -algebra definituko dugu, hau da, $\sigma(X)$.

2.3.1 Definizioa. *Aurreko paragrafoko baldintzetan,*

$$\sigma(X) = X^{-1}(\mathcal{B}').$$

Badakigu, $X^{-1}(\mathcal{B}') = \{(X \in A) : A \in \mathcal{B}'\}$ dela, beraz, ondoko eran ere definitu daiteke goikoa:

$$\sigma(X) = \{(X \in A) : A \in \mathcal{B}'\}.$$

Goiko definizioaren arabera, $\sigma(X)$ $\mathcal{B}'$ -ren elementuei alderantzizko aplikazioa aplikatuz lortutako elementuez osatuta dago. Hortaz, $X \in \mathcal{B}/\mathcal{B}'$ denez, $\sigma(X)$ $\mathcal{B}$ -ren elementuez osatuta dagoela ondorioztatzen dugu. Edo beste modu batean, X aplikazioaren neurgarritasuna ondoko eran definitu daiteke:

$$\sigma(X) \subset \mathcal{B}.$$

Izan ere, $\sigma(X)$ ondoko eratan interpreta daitekela: $\mathcal{B}$ -ren barruan dagoen σ -aljebrarik txikiena da X neurgarria egiten duena.

Orain, azpi- σ -algebra zer den azalduko dugu:

2.3.2 Definizioa. *Demagun $(\Omega, \mathcal{B})$ espazio neurgarria dela. $\mathcal{F}$ σ -algebra bada non $\mathcal{F} \subset \mathcal{B}$, orduan $\mathcal{F}$ $\mathcal{B}$ -ren azpi- σ -algebra izango da.*

Neurgarritasuna azpi- σ -aljebratarako definitu daitekela aurkeztuko dugu orain.

2.3.3 Definizioa. *Demagun $(\Omega, \mathcal{B})$ eta $(\Omega', \mathcal{B}')$ espazio neurgarriak direla, $X : \Omega \rightarrow \Omega'$ aplikazio bat dela eta $\mathcal{F}$ $\mathcal{B}$ -ren σ -algebra. Horrela, $\sigma(X) \subset \mathcal{F}$ bada, orduan esaten dugu $X \in \mathcal{B}/\mathcal{F}$ dela (neurgarria da $\mathcal{F}$ -rekiko).*

Orain, 2.1.2 Proposizioa erabiliz, ondoko emaitza frogatuko dugu.

2.3.1 Proposizioa. *Demagun $(\Omega, \mathcal{B})$ eta $(\Omega', \mathcal{B}')$ espazio neurgarriak direla, $X : \Omega \rightarrow \Omega'$ aplikazio bat dela eta $\mathcal{C}' \subset \mathcal{P}(\Omega')$ dela non $\sigma(\mathcal{C}') = \mathcal{B}'$. Orduan,*

$$\sigma(X) = \sigma(\{(X \in B) : B \in \mathcal{C}'\})$$

edo, beste modu batean esanda,

$$\sigma(X) = \sigma(X^{-1}(\mathcal{C}')).$$

Frogapena.

$$\sigma(\{(X \in B) : B \in \mathcal{C}'\}) = \sigma(X^{-1}(\mathcal{C}')).$$

Orain, 2.1.2 Proposizio erabiliz, badakigu $\sigma(X^{-1}(\mathcal{C}')) = X^{-1}(\sigma(\mathcal{C}'))$ egia dela, beraz

$$\sigma(\{(X \in B) : B \in \mathcal{C}'\}) = X^{-1}(\sigma(\mathcal{C}')).$$

Orain, $\sigma(\mathcal{C}') = \mathcal{B}'$ dela erabiliz,

$$\sigma(\{(X \in B) : B \in \mathcal{C}'\}) = X^{-1}(\mathcal{B}').$$

Eta frogapena bukatzen da ohartuz $X^{-1}(\mathcal{B}') = \sigma(X)$ 2.3.1 Definizioa dela eta. □

Emaizta honen ondorioz eta kontuan hartuz $\beta = \sigma((-\infty, a] : a \in \mathbb{R})$ dela, jarraian dugun korolaria lortzen dugu:

2.3.1 Korolaria. *X zorizko aldagaia bada,*

$$\sigma(X) = \sigma(\{(X \leq a) : a \in \mathbb{R}\}).$$

Emaizta honen ondorioz, ondoko berdintasuna dugu

$$X^{-1}(\beta) = \sigma(\{(X \leq a) : a \in \mathbb{R}\}).$$

2.3.1 Adibidea. *Demagun $A \in \mathcal{B}$. Hartu $X = 1_A$ eta kalkulatu $\sigma(X)$ bi modu ezberdinetan.*

- *Definizioa aplikatuz. $\sigma(X) = X^{-1}(\beta)$. Hartu $B \in \mathcal{B}$ eta X -ren irudia $\{0, 1\}$ denez, ondoko kasuak ematen dira:*

- $0, 1 \notin B$, $X^{-1}(B) = \emptyset$
- $0 \in B$ $1 \notin B$, $X^{-1}(B) = \bar{A}$
- $0 \notin B$ $1 \in B$, $X^{-1}(B) = A$
- $0, 1 \in B$, $X^{-1}(B) = \Omega$

Horren ondorioz, $\sigma(X) = \{\emptyset, \Omega, A, \bar{A}\}$ dela frogatu dugu definizioa erabiliz.

- *Aurreko korolaria erabiliz. $\sigma(X) = \sigma(\{(X \leq a) : a \in \mathbb{R}\})$. Ondoko kasuak aztertuko ditugu:*

- $a < 0$ bada, $(X \leq a) = \emptyset$
- $a \geq 1$ bada, $(X \leq a) = \Omega$
- $a \in [0, 1)$ bada, $(X \leq a) = \bar{A}$

Ondorioz, $\sigma(X) = \sigma(\{(X \leq a) : a \in \mathbb{R}\}) = \sigma(\{\emptyset, \Omega, \bar{A}\}) = \{\emptyset, \Omega, A, \bar{A}\}$.

2.4 Independentzia

Suposatu $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ probabilitate espazioa dela. Bi gertaeren eta gertaera kopuru infinitoen independentzia gogoratuz hasiko gara:

2.4.1 Definizioa. Suposatu $A, B \in \mathcal{B}$ direla. Orduan, A eta B independenteak dira $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ bada.

2.4.2 Definizioa. Suposatu $A_i \in \mathcal{B}$, $i = 1, \dots, n$ direla. Gertaera hauek

- binaka independenteak dira $P(A_i \cap A_j) = P(A_i)P(A_j)$ bada, $\forall i \neq j$.
- elkar-independienteak dira ondokoa betetzea bada

$$P\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} P(A_i), \quad \forall I \subseteq \{1, \dots, n\}$$

Argi dago elkar-independienteak diren gertaerak binaka indendienteak direla, baina kontrakoa ez dela beti betetzen.

Orain gertaeren-familien independentzia definituko dugu. Lehenengo pausua gertaera-familia kopurua finitua aztertzean datza.

2.4.3 Definizioa. Suposatu $\mathcal{C}_i \subset \mathcal{B}$, $i = 1, \dots, n$ gertaera-familiak direla. $\mathcal{C}_i$ gertaera-klaseak independenteak dira, edozein $A_1, \dots, A_n$ -rako, non $A_i \in \mathcal{C}_i$, $i = 1, \dots, n$ izanik, $A_1, \dots, A_n$ gertaerak elkar-independienteak badira.

2.4.1 Adibidea. Demagun $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ probabilitate espazioa dela eta $A \in \mathcal{B}$. Hartu $\mathcal{C}_1 = \{\emptyset, \Omega\}$ eta $\mathcal{C}_2 = \{\emptyset, \Omega, A, \bar{A}\}$. Azalduko dugu $\mathcal{C}_1$ eta $\mathcal{C}_2$ gertaera-klaseak independenteak direla. Horretarako, hartu $\forall B \in \mathcal{C}_2$ eta

- $\mathbb{P}(\emptyset \cap B) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0$ eta $\mathbb{P}(\emptyset)\mathbb{P}(B) = 0$
- $\mathbb{P}(\Omega \cap B) = \mathbb{P}(B)$ eta $\mathbb{P}(\Omega)\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B)$

Aurreko adibidean ikusi dugu modu sinplean aztertu daitekela bi gertaeren-familien independentzia. Hala ere, orokorrean goiko metodoa (hau da, definizioa erabiltzea) ezin da erabili, eragiketa kopuru erraldoiak egin behar direlako askotan. Horregatik, gertaeren-familien independentzia aztertzeke modu alternatiboak azalduko ditugu. Jarraian aurkeztuko ditugun emaitzak σ -algebren independentzia aztertzeke balio du.

2.4.1 Proposizioa (Oinarrizko Irizpidea). Demagun $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ probabilitate espazioa dela eta $\mathcal{C}_i$ gertaera-familia ez-hutsa dela, $i = 1, \dots, n$ izanik, non ondokoak betetzen diren:

- $\mathcal{C}_i$ π -sistema da, $i = 1, \dots, n$ izanik,
- $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_n$ independenteak dira.

Orduan, $\sigma(\mathcal{C}_1), \dots, \sigma(\mathcal{C}_n)$ *independienteak dira*.

Orain, gertaera-familia kopuru finitotik edozein gertaeren-familien independentzia aztertuko dugu. Suposatuko dugu T edozein multzo dela (zenbakigarria edo ez).

2.4.4 Definizioa. Suposatu $\{\mathcal{C}_t : t \in T\}$ dela, non $\mathcal{C}_t \subset \mathcal{P}(\Omega)$. Orduan, $\{\mathcal{C}_t, t \in T\}$ *independienteak dira*, edozein I finiturako non $I \subset T$, $\{\mathcal{C}_t, t \in I\}$ *independienteak badira*.

Goiko definizioaren eta Oinarrizko Irizpidearen ondorioz, ondoko emaitza lortzen da.

2.4.1 Korolaria. Demagun $\{\mathcal{C}_t : t \in T\}$ π -sistemak eta elkar-independienteak direla. Orduan, $\{\sigma(\mathcal{C}_t) : t \in T\}$ *independienteak dira*.

Orain, zorizko aldagaien independentzia definituko dugu.

2.4.5 Definizioa. Demagun $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ probabilitate espazioa dela. Orduan, $\{X_t, t \in T\}$ zorizko aldagaien familia independentea da $\{\sigma(X_t), t \in T\}$ σ -algebra independenteak badira.

2.4.2 Adibidea. $A_1, A_2 \in \mathcal{B}$ independenteak badira, $1_{A_1}, 1_{A_2}$ independenteak direla frogatu

Gogoratu oinarrizko probabilitateko liburuetan zorizko aldagaien independentzia beste modu batean definitzen direla: zorizko aldagai diskretuetan baterako probabilitate legea eta marginalak berdinak izan behar dira, aldiz zorizko aldagai jarraituetan baterako dentsitate funtzioa eta marginalak berdinak izan behar dira. Liburu hone-tan ikuspuntu orokor batetik aztertuko ditugu zorizko aldagaiak (gehienetan ez dugu bereiziko zorizko aldagai diskretu eta jarraituen artean).

Oinarrizko irizpidearen ondorioz, ondoko emaitza dugu.

2.4.2 Proposizioa. Demagun $X_1, \dots, X_n$ zorizko aldagaiak direla. Orduan,

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} (X_i \leq x_i)\right) = \prod_{i \in I} \mathbb{P}(X_i \leq x_i), \forall I \subset \{1, \dots, n\}, \forall x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R} \quad (2.1)$$

ematen bada, orduan $X_1, \dots, X_n$ *independienteak dira*.

Frogapena. Hartu $\mathcal{C}_t = X_t^{-1}((-\infty, x], x \in \mathbb{R})$, $t = 1, 2, \dots, n$. Lehenengo, frogatuko dugu $\mathcal{C}_t$ π -sistema dela: $\forall x, y \in \mathbb{R}$

$$X_t^{-1}((-\infty, x]) \cap X_t^{-1}((-\infty, y]) = X_t^{-1}((-\infty, \min(x, y)]).$$

Gainera, (2.1) ekuazioak dioenaren arabera, $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_n$ independenteak dira. Beraz, oinarrizko irizpidearen ondorioz, $\sigma(\mathcal{C}_1), \dots, \sigma(\mathcal{C}_n)$ independenteak dira. Gainera, $\mathcal{C}_t$ -ren definizioz eta Proposizio (2.3.1)-aren emaitzagatik, ondoko berdintzak ematen dira edozein t -rako:

$$\sigma(\mathcal{C}_t) = \sigma(X_t^{-1}((-\infty, x]) = \sigma(X_t)$$

Ondorioz, $\sigma(X_1), \dots, \sigma(X_n)$ independenteak dira eta, 2.4.5 Definizioagatik, $X_1, \dots, X_n$ independenteak dira. $\square$

Ohartuko gara oinarritzko probabilitateko liburuetan zorizko aldagaiak independienteak dira jakiteko (2.1)-ren baliokidea den baldintza egiaztatzen da; izan ere, 1.2.5 Proposiziotik lortutako ondorioagatik, banaketa funtzioak guztiz definitzen du probabilitate banaketa.

2.5 Borel-Cantelli-ren Lemak

Atal honetan, Borel-Cantelli-ren Lemak frogatuko ditugu. Hauek, $\limsup A_n$ -ren probabilitateari buruzko informazioa ematen dute. Has gaitezen lehenengoarekin.

2.5.1 Proposizioa (Borel-Cantelli-ren Lehenengo Lema). *Demagun $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ probabilitate espazioa dela eta $\{A_n, n \geq 1\}$ gertaera-familia dela. Orduan, $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) < \infty$ bada, orduan*

$$\mathbb{P}(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n) = 0.$$

Frogapena. Demagun $\{A_n, n \geq 1\}$, non $A_i \in \mathcal{B}$ den, $i = 1, \dots, n$. Badakigu $\cup_{k=n}^{\infty} A_k \downarrow$ dela eta $\limsup$ -en definizioa erabiliz,

$$\mathbb{P}(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right).$$

Orain, probabilitate neurriaren azpi batukotasunaren zenbakigarriaren propietateagatik, badakigu edozein n -rako $\mathbb{P}(\cup_{k=n}^{\infty} A_n) \leq \sum_{k=n}^{\infty} \mathbb{P}(A_k)$. Beraz,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_n\right) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n}^{\infty} \mathbb{P}(A_k).$$

Orain, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(A_k) < \infty$ denez, badakigu $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n}^{\infty} \mathbb{P}(A_k) = 0$ dela. Beraz, frogatu dugu nahi genuena. $\square$

Orain, pentsa genezake goiko emaitzaren kontrakoa ere egia dela. Hau da, $\{A_n, n \geq 1\}$ gertaera-familia batek $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) = \infty$ betetzen badu, orduan $\mathbb{P}(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n) = 1$ dela. Honen kontradibidea aurkeztuko dugu orain.

2.5.1 Adibidea. *Demagun $\Omega = (0, 1)$ dugula eta $\{A_n, n \geq 1\}$ gertaera-familia dela non $A_n = (0, 1/n)$. Lebesgue-ren neurria hartuko dugu. Horrela, $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} 1/n = \infty$ dugu. Bestalde, erraz ikusten da $A_n \downarrow$ ematen dela eta, ondorioz, $\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n = \cap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$. Beraz, $\mathbb{P}(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n) = 0$.*

Hurrengo emaitza Borel-Cantelli-ren Bigarren Lema deitzen da eta esaten duena zera da: Borel-Cantelli-ren Lehenengo Lemaren kontrakoa egia da independentzia edukiz gero.

2.5.2 Proposizioa (Borel-Cantelli-ren Bigarren Lema). *Demagun $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ probabilitate espazioa dela eta $\{A_n, n \geq 1\}$ elkar-independienteak diren gertaera-familia dela. Orduan, $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) = \infty$ bada, orduan*

$$\mathbb{P}(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n) = 1.$$

Frogapena. Badakigu $\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n = \overline{\liminf_{n \rightarrow \infty} \bar{A}_n}$ egia dela. Beraz, frogatuko dugu $\mathbb{P}(\liminf_{n \rightarrow \infty} \bar{A}_n) = 0$ dela $\{A_n, n \geq 1\}$ elkar-independienteak diren gertaera-familia denean.

Orain, $\liminf$ -en definizioa eta $\cap_{k \geq n} \bar{A}_k$ ez beheakorra dela erabiliz, ondoko berdintza lortzen dugu:

$$\mathbb{P}(\liminf_{n \rightarrow \infty} \bar{A}_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k \geq n} \bar{A}_k\right).$$

Beraz, emaitza frogatutzat joko dugu edozein n -rako $\mathbb{P}(\cap_{k \geq n} \bar{A}_k) = 0$ egia dela frogatuz gero. Hau da, orain frogatuko duguna alegia.

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=n}^{\infty} \bar{A}_k\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{n+m} \bar{A}_k\right) = \lim_{m \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=n}^{n+m} \bar{A}_k\right),$$

bigarren berdintza egiazkoa izanik $\cap_{k=n}^{n+m} \bar{A}_k \supset \cap_{k=n}^{n+m+1} \bar{A}_k$ egia delako. Orain, independentzia dela eta, $\mathbb{P}$ probabilitate-neurria izateagatik, ondoko berdintzak ditugu:

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=n}^{n+m} \bar{A}_k\right) = \prod_{k=n}^{n+m} \mathbb{P}(\bar{A}_k) = \prod_{k=n}^{n+m} (1 - \mathbb{P}(A_k)).$$

Orain, $1 - x \leq e^{-x}$ ezberdintza aplikatuz, ondokoa dugu:

$$\prod_{k=n}^{n+m} (1 - \mathbb{P}(A_k)) \leq \prod_{k=n}^{n+m} e^{-\mathbb{P}(A_k)}.$$

Ondorioz, gure emaitza frogatuta dago $\prod_{k=n}^{n+m} e^{-\mathbb{P}(A_k)} \rightarrow 0$ egia bada, $m \rightarrow \infty$ ematen denean. Horretarako, $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) = \infty$ egia denez, $\sum_{k=n}^{\infty} \mathbb{P}(A_k) = \infty$ ematen dela erabiliko dugu.

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \prod_{k=n}^{n+m} e^{-\mathbb{P}(A_k)} = \lim_{m \rightarrow \infty} e^{-\sum_{k=n}^{n+m} \mathbb{P}(A_k)} = e^{-\infty} = 0.$$

□

Borel-Cantelli-ren Lemen ondorioz, Borel-en Zero-Bat Legea lortzen dugu, hau da: $\{A_n, n \geq 1\}$ elkar-independienteak diren gertaera-familia bada,

- $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) < \infty$ bada, orduan $\mathbb{P}(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n) = 0$.
- $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) = \infty$ bada, orduan $\mathbb{P}(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n) = 1$.

2.6 Frogapenak

2.6.1 2.1.2 Proposizioaren frogapena

Frogapena bi pausutan egingo dugu:

- Lehenik, $\sigma(X^{-1}(\mathcal{C}')) \subset X^{-1}(\sigma(\mathcal{C}'))$ frogatuko dugu. Badakigu $\mathcal{C}' \subset \sigma(\mathcal{C}')$ egia dela eta, beraz,

$$\begin{aligned} X^{-1}(\mathcal{C}') &= \{X^{-1}(C') : X^{-1}(C') \in \mathcal{C}'\} \subset \{X^{-1}(C') : X^{-1}(C') \in \sigma(\mathcal{C}')\} \\ &= X^{-1}(\sigma(\mathcal{C}')). \end{aligned}$$

Horrela, $X^{-1}(\mathcal{C}') \subset X^{-1}(\sigma(\mathcal{C}'))$ ematen dela frogatu dugu. Gainera, 2.1.1 Proposizioa emaitzagatik, badakigu $X^{-1}(\sigma(\mathcal{C}'))$ σ -algebra dela eta, ondorioz,

$$\sigma(X^{-1}(\mathcal{C}')) \subset X^{-1}(\sigma(\mathcal{C}')).$$

- Orain, $\sigma(X^{-1}(\mathcal{C}')) \supset X^{-1}(\sigma(\mathcal{C}'))$ frogatuko dugu. Definitu

$$\mathcal{F}' = \{B' \in \mathcal{P}(\Omega') : X^{-1}(B') \in \sigma(X^{-1}(\mathcal{C}'))\}.$$

$\mathcal{F}'$ σ -algebra da (beherago frogatuko dugu). Ohartu

$$X^{-1}(\mathcal{F}') = \{X^{-1}(B') : B' \in \mathcal{F}'\} = \{X^{-1}(B') : B' \in \sigma(X^{-1}(\mathcal{C}'))\},$$

beraz $X^{-1}(\mathcal{F}') \subset \sigma(X^{-1}(\mathcal{C}'))$. Gainera, σ -algebrarik txikienaren definizioz, badakigu $X^{-1}(\mathcal{C}') \subset \sigma(X^{-1}(\mathcal{C}'))$ eta, $\mathcal{F}'$ -ren definizioagatik, lortzen dugu $\mathcal{C}' \subset \mathcal{F}'$. Bestalde, $\mathcal{F}'$ σ -algebra denez (ikusi beherago), ondokoa egia da: $\sigma(\mathcal{C}') \subset \mathcal{F}'$. Ondorioz,

$$X^{-1}(\sigma(\mathcal{C}')) = \{X^{-1}(C') : C' \in \sigma(\mathcal{C}')\} \subset \{X^{-1}(C') : C' \in \mathcal{F}'\} = X^{-1}(\mathcal{F}').$$

Aurreko guztiaren ondorioz, $X^{-1}(\sigma(\mathcal{C}')) \subset X^{-1}(\mathcal{F}') \subset \sigma(X^{-1}(\mathcal{C}'))$ eta frogatu dugu nahi genuena.

2.6.1 Lema. $\mathcal{F}'$ σ -algebra da.

Frogapena. Frogatuko dugu $\mathcal{F}'$ itxia dela kontrakotasunerako, bildura zenbakigarriako eta ebakidura zenbakigarriako.

- Kontrakotasuna. Frogatu nahi dugu $A' \in \mathcal{F}'$ bada, orduan $\overline{A'} \in \mathcal{F}'$. Horrela, $A' \in \mathcal{F}'$ izateagatik, $\mathcal{F}'$ -ren definizioz, $X^{-1}(A') \in \sigma(X^{-1}(\mathcal{C}'))$ egia dela. Gainera,

$\sigma(X^{-1}(\mathcal{C}'))$ σ -algebra izateagatik, $\overline{X^{-1}(A')} \in \sigma(X^{-1}(\mathcal{C}'))$ betetzen da eta, alderantzizko aplikazioen propietateengatik, $X^{-1}(\overline{A'}) = \overline{X^{-1}(A')}$ betetzen da, beraz $X^{-1}(\overline{A'}) \in \sigma(X^{-1}(\mathcal{C}'))$. Horren ondorioz, $\overline{A'} \in \mathcal{F}'$ ematen dela lortu dugu.

- Bildura zenbakigarria. Frogatu nahi dugu $A'_n \in \mathcal{F}'$ bada edozein n -rako, orduan $\bigcup_{n \geq 1} A'_n \in \mathcal{F}'$ ematen dela. Lehenik, $A'_n \in \mathcal{F}'$ izateagatik, orduan $X^{-1}(A'_n) \in \sigma(X^{-1}(\mathcal{C}'))$ ematen da edozein n -rako. Horrela, $\sigma(X^{-1}(\mathcal{C}'))$ σ -algebra izateagatik, ondokoa ematen da:

$$\bigcup_{n \geq 1} X^{-1}(A'_n) \in \sigma(X^{-1}(\mathcal{C}')).$$

Alderantzizko aplikazioen propietateengatik, $\bigcup_{n \geq 1} X^{-1}(A'_n) = X^{-1}(\bigcup_{n \geq 1} A'_n)$ ematen dela badakigu. Beraz, lortu dugu

$$X^{-1}\left(\bigcup_{n \geq 1} A'_n\right) \in \sigma(X^{-1}(\mathcal{C}')),$$

eta honen ondorioz, $\bigcup_{n \geq 1} A'_n \in \mathcal{F}'$ egia da.

- Ebakidura zenbakigarria. Aurreko kasuaren antzeko moduan frogatzen da.

□

2.6.2 Oinarritzko Irizpidearen frogapena

Izan bedi $A_i \in \mathcal{C}_i$, $i = 1, 2, \dots$. Frogatuko dugu $\sigma(\mathcal{C}_1), \mathcal{C}_2, \dots, \mathcal{C}_n$ independenteak direla. Finkatu $A_2 \in \mathcal{C}_2, A_3 \in \mathcal{C}_3, \dots, A_n \in \mathcal{C}_n$ eta definitu

$$\mathcal{L}_1 = \{A \in \mathcal{B} : A, A_2, \dots, A_n \text{ elkar-independienteak diren}\}.$$

$\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \dots, \mathcal{C}_n$ independenteak izateagatik, $\mathcal{C}_1 \in \mathcal{L}_1$. Orain, $\mathcal{L}_1$ λ -sistema da (behean frogatuko dugu) eta, orduan, $\mathcal{C}_1$ π -sistema denez, Dynkin-en Teoremagatik, $\sigma(\mathcal{C}_1) \subset \mathcal{L}_1$ betetzen da. Horregatik, $\sigma(\mathcal{C}_1), \mathcal{C}_2, \dots, \mathcal{C}_n$ independenteak dira.

Frogapena indukzioz bukatuko dugu. Suposatuko dugu existitzen dela $i \in \{2, \dots, n\}$ non $\sigma(\mathcal{C}_1), \dots, \sigma(\mathcal{C}_{i-1}), \mathcal{C}_i, \mathcal{C}_{i+1}, \dots, \mathcal{C}_n$ independenteak diren eta frogatuko dugu $\sigma(\mathcal{C}_1), \dots, \sigma(\mathcal{C}_{i-1}), \sigma(\mathcal{C}_i), \mathcal{C}_{i+1}, \dots, \mathcal{C}_n$ independenteak direla. Horretarako, finkatu $B_j \in \sigma(A_j)$ $\forall j < i$ eta $A_j \in \mathcal{C}_j$ $\forall j > i$ eta definitu

$$\mathcal{L}_i = \{A \in \mathcal{B} : B_1, \dots, B_{i-1}, A, A_{i+1}, \dots, A_n \text{ elkar-independienteak diren}\}.$$

Hipotesi induktiboagatik, badakigu $\mathcal{C}_i \subset \mathcal{L}_i$ ematen dela. Gainera, $\mathcal{C}_i$ π -sistema da. Beraz, $\mathcal{L}_i$ λ -sistema izateagatik (beheko lemaaren antzeko moduan frogatzen da $\mathcal{L}_i$ λ -sistema dela), Dynkin-en Teoremagatik, $\sigma(\mathcal{C}_i) \subset \mathcal{L}_i$ betetzen da eta, horrela, frogatu dugu nahi genuena.

2.6.2 Lema. $\mathcal{L}_1$ λ -sistema da.

Frogapena. Postulatu berriak betetzen dituela frogatuko dugu. Hartu $I \subset \{2, \dots, n\}$.

- $\Omega \in \mathcal{L}_1$ ematen dela aurkeztuko dugu. Lehenengo, $\Omega \in \mathcal{B}$ egia da, $\mathcal{B}$ σ -algebra delako. Bestalde, frogatuko dugu $\mathbb{P}(\Omega \cap (\cap_{i \in I} A_i)) = \mathbb{P}(\Omega) \mathbb{P}(\cap_{i \in I} A_i)$. Alde batetik, $\Omega \cap (\cap_{i \in I} A_i) = (\cap_{i \in I} A_i)$ betetzen da eta, horregatik, $\mathbb{P}(\Omega \cap (\cap_{i \in I} A_i)) = \mathbb{P}(\cap_{i \in I} A_i)$. Eta frogapena bukatu da ohartuz $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ ematen dela, $\mathbb{P}$ probabilitate-neurria izateagatik.
- Frogatuko dugu $A \in \mathcal{L}_1$ bada, orduan $\bar{A} \in \mathcal{L}_1$ ematen dela. Lehenengo, $\bar{A} \in \mathcal{B}$, $\mathcal{B}$ σ -algebra izateagatik. Bestalde, $A \in \mathcal{L}_1$ egia izateagatik, badakigu

$$\mathbb{P}\left(A \cap \left(\bigcap_{i \in I} A_i\right)\right) = \mathbb{P}(A) \prod_{i \in I} \mathbb{P}(A_i),$$

eta frogatu nahi duguna da

$$\mathbb{P}\left(\bar{A} \cap \left(\bigcap_{i \in I} A_i\right)\right) = \mathbb{P}(\bar{A}) \prod_{i \in I} \mathbb{P}(A_i).$$

Horrela,

$$\mathbb{P}\left(\bar{A} \cap \left(\bigcap_{i \in I} A_i\right)\right) = \mathbb{P}\left(\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) - A\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) - \mathbb{P}\left(A \cap \left(\bigcap_{i \in I} A_i\right)\right)$$

Badakigu $A, A_2, \dots, A_n$ elkar-independienteak direla, orduan

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) - \mathbb{P}\left(A \cap \left(\bigcap_{i \in I} A_i\right)\right) = \prod_{i \in I} \mathbb{P}(A_i) - \mathbb{P}(A) \prod_{i \in I} \mathbb{P}(A_i) = \mathbb{P}(\bar{A}) \prod_{i \in I} \mathbb{P}(A_i).$$

- Frogatuko dugu $B_n \in \mathcal{L}_1$ betetzen denean edozein n -rako non $B_i \cap B_j = \emptyset \ \forall i \neq j$, orduan $\cup_{n \geq 1} B_n \in \mathcal{L}_1$ ematen dela. Lehenik, $\cup_{n \geq 1} B_n \in \mathbb{B}$ betetzen dela ikusten da; izan ere, $B_n \in \mathbb{B}$ ematen da eta $\mathbb{B}$ σ -algebra da. Ondoren, frogatuko dugu ondoko propietatea betetzen dela:

$$\mathbb{P}\left(\left(\bigcup_{n \geq 1} B_n\right) \cap \left(\bigcap_{i \in I} A_i\right)\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n \geq 1} B_n\right) \prod_{i \in I} \mathbb{P}(A_i).$$

Horrela,

$$\mathbb{P}\left(\left(\bigcup_{n \geq 1} B_n\right) \cap \left(\bigcap_{i \in I} A_i\right)\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n \geq 1} \left(B_n \cap \left(\bigcap_{i \in I} A_i\right)\right)\right).$$

Bateraezinak direnez eta $\mathbb{P}$ probabilitate neurria izateagatik,

$$\mathbb{P} \left(\bigcup_{n \geq 1} \left(B_n \cap \left(\bigcap_{i \in I} A_i \right) \right) \right) = \sum_{n \geq 1} \mathbb{P} \left(B_n \cap \left(\bigcap_{i \in I} A_i \right) \right).$$

Eta $B_n \in \mathcal{L}_1$ denez, orduan

$$\mathbb{P} \left(B_n \cap \left(\bigcap_{i \in I} A_i \right) \right) = \mathbb{P}(B_n) \mathbb{P} \left(\bigcap_{i \in I} A_i \right).$$

Horrela,

$$\sum_{n \geq 1} \mathbb{P} \left(B_n \cap \left(\bigcap_{i \in I} A_i \right) \right) = \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(B_n) \mathbb{P} \left(\bigcap_{i \in I} A_i \right) = \mathbb{P} \left(\bigcap_{i \in I} A_i \right) \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(B_n).$$

Eta $\mathbb{P}$ probabilitate neurria izateagatik, $\sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(B_n) = \mathbb{P}(\cup_{n \geq 1} B_n)$ eta, horrela,

$$\mathbb{P} \left(\bigcap_{i \in I} A_i \right) \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(B_n) = \mathbb{P} \left(\bigcap_{i \in I} A_i \right) \mathbb{P} \left(\bigcup_{n \geq 1} B_n \right).$$

Eta, beraz, frogatu dugu nahi genuena.

□

2.7 Ariketak

2.7.1 Ariketa. Demagun $(\Omega, \mathcal{B})$ espazio neurgarria dela. Frogatu $1_A \in \mathcal{B}/\beta$ baldin eta soilik baldin $A \in \mathcal{B}$.

2.7.2 Ariketa. Suposatu $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, X -ren irudia, $\mathcal{R}$, multzo zenbakigarria izanik. Frogatu $X \in \mathcal{B}/\beta$ baldin eta soilik baldin

$$X^{-1}(\{x\}) \in \mathcal{B}, \quad \forall x \in \mathcal{R}.$$

2.7.3 Ariketa. Demagun $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ espazio neurgarria dela. Frogatu $\beta \subset \mathcal{B}$ baldin eta soilik baldin edozein funtzio erreala eta jarraitua $\mathcal{B}/\beta$ neurgarria da.

2.7.4 Ariketa. Frogatu X zorizko aldagaia berarekin independentea dela baldin eta soilik baldin existitzen bada c non $P(X = c) = 1$.

2.7.5 Ariketa. Izan bedi $\{X_k, k \geq 1\}$ independenteak eta $Ber(p)$ banaketa jarraitzen duten zorizko aldagaien familia. Zein da probabilitatea 101 patroia infinitu aldiz agertzeko?

Antzeko moduan, suposatu $\{X_k, k \geq 1\}$ independenteak direla, baina zoriz idatzitako hizkiez osatuta dagoela. Zein da probabilitatea JOSU patroia infinitu aldiz agertzeko? Eta ENARAENeko infinitu aldiz agertzeko?

2.7.6 Ariketa. *Adibide bat aurkitu non bi zorizko aldagai probabilitate neurri batentzat independenteak diren, baina beste probabilitate neurri batentzat ez.*

2.7.7 Ariketa. *Demagun X_1 eta X_2 zorizko aldagai independenteak direla eta -1 eta 1 balioak baino ez dituzte hartzen probabilitate berdinarekin. Esan daiteke X_1, X_2 eta X_1X_2 binaka independenteak direla? Eta elkar-independienteak?*

2.7.8 Ariketa. *Demagun $B, A_1, A_2, \dots$ gertaerak direla. Frogatu $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n \cap B) < \infty$ bada, orduan*

$$\mathbb{P}(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n) \leq 1 - \mathbb{P}(B).$$

2.7.9 Ariketa. *Izan bedi $\{X_n : n \geq 1\}$ zorizko aldagai independenteen segida, non $X_n \sim \text{Unif}(1, 2, \dots, n)$, $n = 1, 2, \dots$. Zein da probabilitatea $(X_n = 1)$ gertaera infinitu aldiz emateko?*

2.7.10 Ariketa. *Demagun $X_1, \dots, X_n$ aplikazioak direla, non $X_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ den eta $(\Omega, \mathbb{B})$ espazio neurgarrian definituta dauden, edozein i -rako.*

(a) *Frogatu $X_1, \dots, X_n$ zorizko aldagaiak direla baldin eta soilik baldin $(X_1, \dots, X_n)$ zorizko bektorea da, hau da,*

$$\forall i = 1, \dots, n, X_i \in \mathcal{B}/\beta \iff (X_1, \dots, X_n) \in \mathcal{B}/\beta^n.$$

(b) *Frogatu $X_1, \dots, X_n$ zorizko aldagaiak badira, orduan*

$$\sigma(X_1, \dots, X_n) = \sigma \left(\bigcup_{i=1}^n \sigma(X_i) \right).$$

3

Itxaropena

Atal honetan, itxaropen matematikoa (edo itxaropena) ikasiko dugu. Horretarako, ez badugu kontrakorik esaten, suposatuko dugu aztertuko ditugun aplikazioak $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ probabilitate espazioan definituta daudela. Zorizko aldagaiak aztertuko ditugunean, $X : (\Omega, \mathcal{B}) \rightarrow (\mathbb{R}, \beta)$ izango dugu, hau da, $X \in \mathcal{B}/\beta$. Aldiz, aplikazioak aztertuko ditugunean, $X : (\Omega, \mathcal{B}) \rightarrow (\Omega', \mathcal{B}')$ izango dugu, alegia, $X \in \mathcal{B}/\mathcal{B}'$.

3.1 Definizioa

Demagun X aplikazio bat dela. Horrela, X -ren itxaropena da haren Lebesgue-ren integrala $\mathbb{P}$ probabilitate neurria kontuan hartuta, alegia

$$\mathbb{E}[X] = \int_{\Omega} X d\mathbb{P}.$$

3.1.1 Zorizko Aldagai Sipleak

Has gaitezen zorizko aldagai sipleetako itxaropenarekin. X zorizko aldagai siplea dela esango dugu haren irudia finitua bada. Horrela, edozein zorizko aldaia siple ondoko eran definitu daiteke: $\forall \omega \in \Omega$,

$$X(\omega) = \sum_{i=1}^k a_i 1_{A_i}(\omega),$$

non $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, k$ eta $A_1, \dots, A_k$ Ω -ren partiketa den. Ondoko adierazpena neurri-teoriako emaitza ezaguna da eta zorizko aldagai sipleen Lebesgue-ren integrala

adierazten du.

3.1.1 Definizioa (Zorizko aldagai sinpleen itxaropena). X sinplea bada,

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^k a_i \mathbb{P}(A_i).$$

Zenbait adibide azalduko ditugu orain.

3.1.1 Adibidea (Funtzio adierazlea). Demagun $A \in \mathcal{B}$ dela. Orduan, $X = 1_A$ bada,

$$\mathbb{E}[X] = 0 \cdot \mathbb{P}(X = 0) + 1 \cdot \mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(A).$$

3.1.2 Adibidea (Binomiala). Demagun $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{B}$ eta elkar-independienteak direla. Suposatu $\mathbb{P}(A_i) = p$, $i = 1, \dots, n$. Orain, $X = 1_{A_1} + \dots + 1_{A_n}$ kontsideratuko dugu (hau da, binomiala da). Beraz, $\text{Irudi}(X) = \{0, \dots, n\}$, hau da, zorizko aldagai sinplea da. Horrela,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= 0 \cdot \mathbb{P}(X = 0) + 1 \cdot \mathbb{P}(X = 1) + \dots + n \cdot \mathbb{P}(X = n) \\ &= \sum_{k=0}^n k \mathbb{P}(X = k) \\ &= \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= \sum_{k=1}^n k \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= \sum_{k=1}^n n \binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= np \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} p^{k-1} (1-p)^{n-k} \\ &= np(p+q)^{n-1} \\ &= np. \end{aligned}$$

Orain, zorizko aldagai sinpleen Lebesgue-ren integralaren propietate batzuk adieraziko ditugu. Haien frogapenak neurri-teoriako liburuetan aurkitu daitezke.

1. **Lineala:** X eta Y zorizko aldagai sinpleak badira, $\mathbb{E}[aX + bY] = a\mathbb{E}[X] + b\mathbb{E}[Y]$, edozein a eta b errealetarako.

2. **Ez-negatiboa:** X zorizko aldagai ez-negatiboa bada (hau da, $\forall \omega \in \Omega$, $X(\omega) \geq 0$), $\mathbb{E}[X] \geq 0$.
3. **Monotonia:** X eta Y zorizko aldagai sinpleak badira non $X \leq Y$ (hau da, $\forall \omega \in \Omega$, $X(\omega) \leq Y(\omega)$), $\mathbb{E}[X] \leq \mathbb{E}[Y]$.

3.1.1 Oharra. *Itzaropena eragiketa lineala dela ikusi dugu X zorizko aldagai sinplea bada. Hori erabiliz, 3.1.2 Adibideko emaitza oso erraz lortzen da:*

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[1_{A_1} + \dots + 1_{A_n}] = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[1_{A_i}] \stackrel{3.1.1 \text{ Adibidea}}{=} \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i) = \sum_{i=1}^n p = np.$$

3.1.2 Zorizko Aldagai Ez-negatiboak

Has gaitzen neurri-teoriako ondoko emaitza gogoratzen.

3.1.1 Proposizioa. *X zorizko aldagai ez-negatiboa bada (hau da, $\text{Irudi}(X) \subset [0, \infty]$ bada), orduan existitzen da zorizko aldagai sinpleen segida $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ non $0 \leq X_n \uparrow X$ den.*

Goiko emaitza kontuan hartuta, zorizko aldagai ez-negatiboen itzaropena ondoko eran definitu ahal dugu.

3.1.2 Definizioa (Zorizko aldagai ez-negatiboen itzaropena). *X ez-negatiboa bada,*

$$\mathbb{E}[X] = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X_n],$$

non $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ zorizko aldagai sinpleen segida den, $0 \leq X_n \uparrow X$ izanik.

Orain, goian definitutakoaren inguruko ondoko oharra aurkeztuko dugu:

3.1.2 Oharra. *$X_1 \leq X_2 \leq \dots$ denez, orduan $\mathbb{E}[X_1] \leq \mathbb{E}[X_2] \leq \dots$ ematen da. Honek esan nahi du $\{\mathbb{E}[X_n] : n \in \mathbb{N}\}$ balio errealeen segida ez-beherakorra dela eta, beraz, limitea duela (finitua edo infinitua izan dateke). Gainera, limitearen balioa ez da $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ segidaren arabera.*

Neurri-teoriako emaitzen arabera, zorizko aldagai sinpleetan betetzen diren propietateak (linealtasuna, monotonia eta ez-negatibotasun) zorizko aldagai ez-negatiboen itzaropenak ere betetzen ditu. Gainera, beste propietate hauek ere betetzen direla badakigu (detaileak neurri-teoriako liburuetan ikusi daitezke):

4. **Fatou-ren Lema:** $\mathbb{E}[\liminf_{n \rightarrow \infty} X_n] \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X_n]$
5. **Konbergentzia Monotonoaren Teorema:** $X_n \uparrow X$ bada, orduan $\mathbb{E}[X_n] \uparrow \mathbb{E}[X]$.
6. **Ia-ziurrenik zero:** $\mathbb{E}[X] = 0$ bada, orduan $X = 0$ ia-ziurrenik, hau da, $\mathbb{P}(X = 0) = 1$. Edo beste modu batean esanda, X -k ezberdin zero balioa hartzen badu, X -k balio hori hartzeko probabilitatea zero da (edo zero neurria du balio horrek).

3.1.3 Zorizko Aldagai Errealak

Lehendabizi, zorizko aldagai baten zati positiboa eta negatiboa definituko ditugu.

3.1.3 Definizioa. *Izan bedi X zorizko aldagai erreala. Orduan, X^+ X -ren zati positiboa da eta X^- zati negatiboa. Hau da, edozein $\omega \in \Omega$ -rako,*

$$X^+(\omega) = \begin{cases} X(\omega), & X(\omega) \geq 0, \\ 0, & X(\omega) < 0, \end{cases}$$

eta

$$X^-(\omega) = \begin{cases} 0, & X(\omega) \geq 0, \\ -X(\omega), & X(\omega) < 0. \end{cases}$$

Ohartu X^+ eta X^- zorizko aldagai ez-negatiboak direla. Hortaz, lehen azaldutakoaren arabera, haien itxaropena beti existitzen da. Gainera, ondoko adierazpenak egiazkoak direla erraz frogatu daitezke:

$$X = X^+ - X^-, \quad |X| = X^+ + X^-. \quad (3.1)$$

Horrela, zorizko aldagai errealen itxaropena definituko dugu.

3.1.4 Definizioa (Zorizko aldagai errealen itxaropena). *X erreala dela suposatuz. Horrela:*

- $\mathbb{E}[X^+]$ edo $\mathbb{E}[X^-]$ finituak badira, orduan

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[X^+] - \mathbb{E}[X^-].$$

Gainera, $\mathbb{E}[X^+] < \infty$ eta $\mathbb{E}[X^-] < \infty$ badira, orduan $\mathbb{E}[X] \in \mathbb{R}$ eta X integragarria dela esaten dugu.

- $\mathbb{E}[X^+] = \mathbb{E}[X^-] = \infty$ bada, orduan $\mathbb{E}[X]$ ez dago definituta.

Goiko emaitzaren arabera, X zorizko aldagai integragarria da $\mathbb{E}[X^+] < \infty$ eta $\mathbb{E}[X^-] < \infty$ badira. Orain, beste baldintza batean zentratuko gara.

3.1.2 Proposizioa. *X integragarria da baldin eta soilik baldin $\mathbb{E}[|X|] < \infty$.*

Frogapena. Lehenik, suposatuko dugu X integragarria dela eta frogatuko dugu $\mathbb{E}[|X|] < \infty$ betetzen dela. Badakigu $|X| = X^+ + X^-$ eta X^+ eta X^- ez-negatiboak izateagatik, itxaropenerako linealitatea betetzen dela, hau da,

$$\mathbb{E}[|X|] = \mathbb{E}[X^+ + X^-] = \mathbb{E}[X^+] + \mathbb{E}[X^-].$$

Eta, X integragarria denez, badakigu $\mathbb{E}[X^+]$ eta $\mathbb{E}[X^-]$ finituak direla. Ondorioz, $\mathbb{E}[|X|] < \infty$ betetzen da.

Orain, kontrako inplikazioa frogatuko dugu. Ohartu, $|X| = X^+ + X^-$ denez, $|X| \geq X^+$ eta $|X| \geq X^-$ ematen dela. Horrela,

- $|X|$ eta X^+ ez-negatiboak direnez, $\mathbb{E}[|X|] \geq \mathbb{E}[X^+]$ eta, $\mathbb{E}[|X|] < \infty$ suposatzen ari garenez, $\mathbb{E}[X^+] < \infty$ frogatu dugu.
- $|X|$ eta X^- ez-negatiboak direnez, $\mathbb{E}[|X|] \geq \mathbb{E}[X^-]$ eta, $\mathbb{E}[|X|] < \infty$ suposatzen ari garenez, $\mathbb{E}[X^-] < \infty$ frogatu dugu.

Ondorioz, X integragarria da $\mathbb{E}[X^+] < \infty$ eta $\mathbb{E}[X^-] < \infty$ betetzen direlako. $\square$

Integragarriak diren zorizko aldagaiak linealitate eta monotonia propietateak betetzen dituzte. Gainera, ondokoa ere betetzen dela frogatuko dugu:

$$|\mathbb{E}[X]| \leq \mathbb{E}[|X|].$$

Propietate hau frogatuko dugu X^+ eta X^- ez-negatiboak direla erabiliz (eta beraz itxaropenak linealitate propietatea betetzen du), baita ezberdintza triangeluarra ere:

$$|\mathbb{E}[X]| = |\mathbb{E}[X^+ - X^-]| = |\mathbb{E}[X^+] - \mathbb{E}[X^-]| \leq \mathbb{E}[X^+] + \mathbb{E}[X^-] = \mathbb{E}[X^+ + X^-] = \mathbb{E}[|X|].$$

Goiko adierazpenerako ere erabili dugu (3.1).

3.1.4 Zorizko Aldagai Konplexuak

Zorizko aldagai konplexua definituko dugu jarraian.

3.1.5 Definizioa. *Zorizko aldagai konplexua $Z : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ aplikazio neurgarri bat da.*

Hortaz, $Z = X + iY$ izango da, X eta Y zorizko aldagai errealak izanik, hau da, bi dimentsioko zorizko bektorea da (X, Y) , X izanik zati erreala eta Y zati irudikaria. Zorizko aldagai konplexuen integragarritasuna eta itxaropena definituko ditugu.

3.1.6 Definizioa. *Z zorizko aldagai konplexua integragarria da X eta Y integragarriak badira. Horrela, Z integragarria bada, ondoko eran definituko dugu bere itxaropena:*

$$\mathbb{E}[Z] = \mathbb{E}[X] + i\mathbb{E}[Y].$$

Orain, zorizko aldagai konplexuen integragarritasuna karakterizatuko dugu.

3.1.3 Proposizioa. *Demagun Z zorizko aldagai konplexua dela. Orduan Z integragarria da baldin eta soilik baldin $\mathbb{E}[|Z|] < \infty$.*

Frogapena. Lehenik, Z integragarria dela suposatuko dugu eta frogatuko dugu $\mathbb{E}[|Z|] < \infty$. Z integragarria izateagatik, $\mathbb{E}[|X|] < \infty$ eta $\mathbb{E}[|Y|] < \infty$ egia da. Gainera, $|Z| = |X + iY| \leq |X| + |Y|$ betetzen da eta, ez-negatiboak izateagatik,

$$\mathbb{E}[|Z|] \leq \mathbb{E}[|X|] + \mathbb{E}[|Y|],$$

eta horrela, $\mathbb{E}[|Z|] < \infty$ dela frogatu dugu.

Orain, kontrako inplikazioa frogatuko dugu. Suposatu $\mathbb{E}[|Z|] < \infty$ eta frogatuko dugu Z integragarria dela. Lehenik, $\mathbb{E}[|X|] < \infty$ eta $\mathbb{E}[|Y|] < \infty$ betetzen direla frogatuko dugu.

- $|X| \leq |Z|$ eta ez-negatiboak izateagatik, $\mathbb{E}[|Z|] \geq \mathbb{E}[|X|]$. Horrela, $\mathbb{E}[|Z|] < \infty$ izateagatik, $\mathbb{E}[|X|] < \infty$ betetzen dela frogatu dugu.
- $|Y| \leq |Z|$ eta ez-negatiboak izateagatik, $\mathbb{E}[|Z|] \geq \mathbb{E}[|Y|]$. Horrela, $\mathbb{E}[|Z|] < \infty$ izateagatik, $\mathbb{E}[|Y|] < \infty$ betetzen dela frogatu dugu.

Aurrekoaren ondorioz, X eta Y integragarriak direla ondorioztatzen dugu eta, horregatik, Z integragarria dela frogatu dugu. $\square$

Atal honetan, aurreko atalean ikusitakoa orokortzen ari gara (izan ere, balio erreal bat zati irudikariaren balioa zero duen zenbaki konplexu bat da).

3.2 Ezaugarri Nagusiak

Orain, itxaropenaren ezaugarri nagusiak ikasiko ditugu. Eraitza hauek hurrengo kapituluetan erabilgarriak izango dira. Hala ere, eraitza hauen frogapenak ez ditugu aurkeztuko; izan ere, neurri-teoriako edo aurreko ataletan agertutako frogapenak dira. Aurreko ataletan bezala, zorizko aldagaiak $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ probabilitate espazioan definituta daudela kontsideratuko dugu.

- $X \sim k$ bada, orduan $\mathbb{E}[X] = k$
- $A \in \mathcal{B}$ bada, orduan $\mathbb{E}[1_A] = \mathbb{P}(A)$
- X sinplea bada, orduan X integragarria da
- X ez-negatiboa bada, orduan $\mathbb{E}[X]$ beti existitzen da (eta $[0, \infty]$ tarte itxiko balioak har ditzake)
- Z zorizko aldagai konplexu integragarria da baldin eta soilik baldin $\mathbb{E}[|Z|] < \infty$.
- Z zorizko aldagai konplexua bada, $\mathbb{E}[Z] = 0$ bada, orduan $Z = 0$ da ia-ziurrenik.
- X eta Y ez-negatiboak badira, orduan $\mathbb{E}[X + Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$.
 Z_1 eta Z_2 zorizko aldagai konplexu integragarriak badira, orduan $\mathbb{E}[Z_1 + Z_2] = \mathbb{E}[Z_1] + \mathbb{E}[Z_2]$.
- X ez-negatiboa eta $c \in \mathbb{R}$ badira, orduan $\mathbb{E}[cX] = c\mathbb{E}[X]$.
 Z zorizko aldagai konplexu integragarria eta $c \in \mathbb{C}$ badira, orduan $\mathbb{E}[cZ] = c\mathbb{E}[Z]$.
- Demagun X eta Y ez-negatiboak edo erreal integragarriak direla. Orduan $X \leq Y$ bada, orduan $\mathbb{E}[X] \leq \mathbb{E}[Y]$.

- Z zorizko aldagai konplexu integragarria bada, orduan $|\mathbb{E}[Z]| \leq \mathbb{E}[|Z|]$.
- **Fatou-ren lema.** $Z_1, Z_2, \dots$ zorizko aldagai konplexu integragarriak badira, orduan

$$\mathbb{E}[\liminf_{n \rightarrow \infty} |Z_n|] \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[|Z_n|].$$

- **Konbergentzia Monotonoaren Teorema.** Demagun $X, X_1, X_2, \dots$, zorizko aldagai ez-negatiboak direla, non $X_n \uparrow X$ den. Orduan, $\mathbb{E}[X] = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X_n]$.
- **Konbergentzia Menderatuaren Teorema.** Demagun $Z, Z_1, Z_2, \dots$, zorizko aldagai konplexu integragarriak direla, non $Z_n \uparrow Z$ den. Existitzen bada U zorizko aldagai ez-negatibo integragarria non $|Z_n| \leq U$ den, orduan $\mathbb{E}[Z] = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[Z_n]$.
- **Aldagai Aldaketaren Teorema.** Demagun $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ eta $(\Omega', \mathcal{B}', \mathbb{P}')$ bi probabilitate espazio direla eta $X : (\Omega, \mathcal{B}) \rightarrow (\Omega', \mathcal{B}')$ aplikazio neurgarria dela. Gainera, h zorizko aldagaia konplexua da $(\Omega', \mathcal{B}')$ espazio neurgarrian definitutakoa. Hau da,

$$\int_{\Omega} h(X) d\mathbb{P} = \int_{\Omega'} h d\mathbb{P}'.$$

Azken emaitza honetatik, oinarritzko probabilitateko liburuetan agertutako itxaropenaren adierazpenak lortzen dira. Hori ikusteko, har dezagun X zorizko aldagai diskretua dela, haren irudia S izanik. Orduan, $\Omega' = S$ dela kontzideratuko dugu eta $\mathbb{P}' = \mathbb{P} \circ X^{-1}$ dela ere. Horrela,

$$\mathbb{E}[h(X)] = \int_{\Omega'} h d\mathbb{P}' = \sum_{s \in S} h(s) P(X = s).$$

3.2.1 Oharra. Azken emaitza honi, $h(X) = e^{itX}$ aplikatuz, integragarria den aplikazio bat lortzen dugu. Hori ikusteko, $|e^{itX}| = 1$ dela ohartuko gara; izan ere,

$$|e^{itX}|^2 = \cos^2(tX) + \sin^2(tX) = 1.$$

Beraz,

$$\int_{\Omega} |e^{itX}| d\mathbb{P} = \int_{\Omega} d\mathbb{P} = 1 < \infty.$$

Hurrengo kapituluan $\mathbb{E}[e^{itX}]$ funtzio karakteristikoa dela azalduko dugu.

3.3 Integral Definitugabeak

Orain dela urte asko dakigula, balio errealak ditugunean, integralak definituak eta definitugabeak existitzen direla. Lebesgue-ren integralaren kasuan ere, definituak eta definitugabeak ere existitzen dira.

Izan bedi $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ probabilitate espazioa eta X ez-negatiboa edo konplexu integragarria den zorizko aldagaia dela suposatu (hau da, $\mathbb{E}[X]$ existitzen dela suposatu).

3.3.1 Definizioa. $A \in \mathcal{B}$ bada, orduan A -ren integral definitugabea ondokoa da:

$$\int_A X \, d\mathbb{P} = \mathbb{E}[X1_A] = \int_{\Omega} X 1_A \, d\mathbb{P}.$$

3.3.1 Oharra. Ohartu $\mathbb{E}[X1_A]$ ondo definituta dagoela. Izan ere, $X \geq 0$ bada, orduan $X1_A$ ere ez-negatiboa da eta, horregatik, $\mathbb{E}[X1_A]$ existitzen da. Aldiz, X zorizko aldagai konplexu integragarria bada, orduan $X1_A$ ere integragarria da; izan ere

$$|X1_A| = |X||1_A| \leq |X|,$$

eta, ondorioz, X integragarria denez,

$$\mathbb{E}[|X1_A|] \leq \mathbb{E}[|X|] < \infty.$$

Beraz, $A \in \mathcal{B}$ gertaera bada, $\int_A X \, d\mathbb{P}$ A -ren integral definitugabea da eta froga daiteke ondoko propietatea betetzen dela: $A_1, A_2, \dots, \in \mathcal{B}$ eta bateraezinak badira,

$$\int_{\cup_{n \geq 1} A_n} X \, d\mathbb{P} = \sum_{n \geq 1} \int_{A_n} X \, d\mathbb{P}. \quad (3.2)$$

Ondorioz, neurri positiboen ezaugarriak betetzen ditu. Esate baterako: A eta B gertaerak badira non $A \subset B$, orduan

$$\int_A X \, d\mathbb{P} \leq \int_B X \, d\mathbb{P}.$$

3.4 Itxaropen Baldintzatua

Demagun $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ eta $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{Q})$ probabilitate espazioak direla. Orduan, esan daiteke

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X] = \int_{\Omega} X \, d\mathbb{P}, \quad \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[X] = \int_{\Omega} X \, d\mathbb{Q}.$$

Edozein $A, B \in \mathcal{B}$ -rako, idatziko dugu $\mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(B|A)$. Gogoratu $\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(B \cap A)}{\mathbb{P}(A)}$ ematen dela, $\mathbb{P}(A) > 0$ denean.

3.4.1 Definizioa. X ez-negatiboa edo konplexu integragarria bada ($\mathbb{P}$ -rekiko), orduan $\mathbb{P}(A) > 0$ bada

$$\mathbb{E}[X|A] = \frac{\mathbb{E}[X1_A]}{\mathbb{E}[1_A]} = \frac{1}{\mathbb{P}(A)} \int_A X \, d\mathbb{P}.$$

Aurkeztuko dugu $X = 1_B$ kasuan, probabilitate baldintzatuaren definizioarekin bat

datorrela. Izan ere,

$$\mathbb{E}[1_B|A] = \int_{\Omega} 1_B d\mathbb{P}_A = \mathbb{P}_A(B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{E}[1_{A \cap B}]}{\mathbb{E}[1_A]} = \frac{\mathbb{E}[1_A 1_B]}{\mathbb{E}[1_A]}.$$

Probabilitate osoaren teoremaren baliokidea den itxaropen osoaren teorema aurkeztuko dugu orain.

3.4.1 Teorema (Itxaropen Osoaren Teorema). *Demagun $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ Ω -ren partiketa dela eta X ez-negatiboa edo integragarria dela ($\mathbb{P}$ -rekiko). Orduan, $\mathbb{P}(A_i) > 0$ denean, $i = 1, 2, \dots$*

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(A_n) \mathbb{E}[X|A_n].$$

Frogapena. $\Omega = \cup_{n \geq 1} A_n$ denez,

$$\mathbb{E}[X] = \int_{\Omega} X d\mathbb{P} = \int_{\cup_{n \geq 1} A_n} X d\mathbb{P} \stackrel{(3.2)}{=} \sum_{n \geq 1} \int_{A_n} X d\mathbb{P}$$

Orain, 3.4.1 Definizioa kontuan hartuz,

$$\sum_{n \geq 1} \int_{A_n} X d\mathbb{P} = \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(A_n) \mathbb{E}[X|A_n].$$

Eta kontuan hartuta $\int_{A_n} X d\mathbb{P} = \mathbb{E}[1_A]$ egia dela, frogatu dugu teorema. $\square$

3.4.1 Oharra. $X = 1_B$ denean, *Itxaropen Osoaren Teoremak Probabilitate Osoaren Teoremarekin koinziditzen du.*

3.5 $\mathcal{L}_p$ Espazioak eta Ezberdintza Garrantzitsuak

Demagun $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ probabilitate espazioa dela. Orduan, $\mathcal{L}$ izango da probabilitate espazio horretan definitutako zorizko aldagai konplexuen multzoa. Orain $\mathcal{L}_p$ espazioak definituko ditugu.

3.5.1 Definizioa. *Izan bedi $p > 0$, orduan*

$$\mathcal{L}_p = \{X \in \mathcal{L} : \mathbb{E}[|X|^p] < \infty\}.$$

Neurri-teoriatik ezaguna da neurri finituek ondoko propietatea betetzen dutela: $0 < p < q$ bada, orduan $\mathcal{L}_q \subset \mathcal{L}_p$ ematen da. Probabilitate neurria neurri finitua denez (hau da, $\mathbb{P}(\Omega) = 1 < \infty$), orduan propietate hau betetzen du. Holderren ezberdintzaren korolarior baten ondorioa dela azalduko dugu.

neurri-teoriako kontzeptuekin jarraituz, $p, q \in [1, \infty)$ badira, esango dugu p eta q zenbaki konjugatuak direla ondokoa betetzen bada: $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Ohartu $p > 1$ bada,

$q = \frac{p}{p-1} > 1$ hartu ahal dugula eta, horrela, p eta q konjugatuak dira. Izan ere,

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \frac{p-1}{p} = \frac{p}{p} = 1.$$

Orain, Holder-en ezberdintza aurkeztuko dugu; haren frogapena neurri-teoriako liburuetan aurkitu daiteke.

3.5.1 Proposizioa (Holder-en ezberdintza). *Demagun p eta q konjugatuak direla eta $U, V \in \mathcal{L}$. Orduan,*

$$\mathbb{E}[|UV|] \leq (\mathbb{E}[|U|^p])^{\frac{1}{p}} (\mathbb{E}[|V|^q])^{\frac{1}{q}}.$$

Goiko emaitzaren ondorioz, ondoko propietatea dugu: $U \in \mathcal{L}_p$ eta $V \in \mathcal{L}_q$ badira eta p eta q konjugatuak badira, orduan $UV \in \mathcal{L}$ da.

3.5.1 Oharra. *Holder-en ezberdintza edozein neurrirako betetzen da, ez da zertan neurri finitua edo probabilitate neurria izan.*

Holder-en ezberdintzaren korolario batzuk aurkeztuko ditugu orain. Lehenengoa Cauchy-Schwartz-en ezberdintza izango da, non Holder-en ezberdintza $p = q = 2$ kasuan aplikatuta lortzen den.

3.5.1 Korolaria (Cauchy-Schwartz-en ezberdintza). *Demagun $U, V \in \mathcal{L}$ dela. Orduan,*

$$\mathbb{E}[UV] \leq \sqrt{\mathbb{E}[|U|^2]} \sqrt{\mathbb{E}[|V|^2]}.$$

Eta Cauchy-Schwartz-en ezberdintzaren ondorioz, ondoko propietatea lortzen dugu: $U, V \in \mathcal{L}_p$ badira, orduan $UV \in \mathcal{L}$ da.

Holder-en ezberdintzaren beste korolario bat azalduko dugu orain.

3.5.2 Korolaria (Lyapunov-en ezberdintza). *Izan bedi $X \in \mathcal{L}$ eta $0 < r < s$. Orduan,*

$$(\mathbb{E}[|X|^r])^{\frac{1}{r}} \leq (\mathbb{E}[|X|^s])^{\frac{1}{s}}.$$

Frogapena. Idatziko dugu $p = \frac{s}{r} > 1$ eta q hautatuko dugu p eta q konjugatuak izateko, hau da, $q = \frac{p}{p-1} > 1$. Orain, $U = |X|^r$ eta $V = 1$ balioetarako, Holder-en ezberdintza aplikatuko dugu eta horrela

$$\mathbb{E}[|X|^r \cdot 1] \leq (\mathbb{E}[|X|^r]^p)^{\frac{1}{p}} (\mathbb{E}[1^q])^{\frac{1}{q}} \stackrel{p=\frac{s}{r}}{=} (\mathbb{E}[|X|^s])^{\frac{r}{s}}.$$

Ondorioz, $(\mathbb{E}[|X|^r])^{\frac{1}{r}} \leq (\mathbb{E}[|X|^s])^{\frac{1}{s}}$ frogatu dugu. □

Lyapunov-en ezberdintzak dioena ondokoa da: $0 < r < s$ bada, orduan

$$(\mathbb{E}[|X|^r])^{\frac{1}{r}} \leq (\mathbb{E}[|X|^s])^{\frac{1}{s}}.$$

Beraz, emaitza honen ondoriz, goian aipatutako propietatea betetzen da, hau da, $0 < r < s$ bada, orduan $\mathcal{L}_s \subset \mathcal{L}_r$.

Orain, Minkowski-ren ezberdintza aurkeztuko dugu. Frogapena neurri-teoriako liburutetan agertzen da.

3.5.2 Proposizioa (Minkowski-ren ezberdintza (edo ezberdintza triangeluarra)). *Demagun $X, Y \in \mathcal{L}$ eta $p \geq 1$. Orduan,*

$$(\mathbb{E}[|X + Y|^p])^{\frac{1}{p}} \leq (\mathbb{E}[|X|^p])^{\frac{1}{p}} + (\mathbb{E}[|Y|^p])^{\frac{1}{p}}$$

Ohartu goiko emaitza edozein neurrirako betetzen dela, hau da, ez da zertan probabilitate neurria (edo neurri finitua) izan. Bestalde, $p \in (0, 1)$ denean, Minkowski-ren ezberdintza ez da beti egia.

Hurrengo emaitzak Markov-en ezberdintzak deitzen dira. Emaitza honen frogapena 3.7 atalean ikusi daiteke.

3.5.3 Proposizioa (Markov-en ezberdintzak). *Demagun $X \in \mathcal{L}$ dela.*

1. $\forall \epsilon > 0$ eta $\forall r > 0$, $\mathbb{P}(|X| \geq \epsilon) \leq \frac{\mathbb{E}[|X|^r]}{\epsilon^r}$.
2. *Existitzen bada k konstante bat non $|X| \leq k$, $\forall \epsilon > 0$ eta $\forall r > 0$*

$$\mathbb{P}(|X| > \epsilon) \geq \frac{\mathbb{E}[|X|^r] - \epsilon^r}{k^r - \epsilon^r}.$$

Markov-en lehenengo ezberdintzaren ondorioz, Chebychev-en ezberdintza lortzen dugu: $\forall \epsilon > 0$,

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}[X]| \geq \epsilon) \leq \frac{\text{Var}[X]}{\epsilon^2}.$$

Bukatzeko, Jensen-en ezberdintza aurkeztuko dugu.

3.5.4 Proposizioa (Jensen-en ezberdintzak). *Demagun $X : \Omega \rightarrow I$, I tarte ireki bat izanik, eta $\psi : I \rightarrow \mathbb{R}$ konbexua dela. Horrela, $X, \psi(X) \in \mathcal{L}_1$ badira,*

$$\psi(\mathbb{E}[X]) \leq \mathbb{E}[\psi(X)].$$

Frogapena. X -ren irudia multzo finitua dela suposatuz frogatuko dugu emaitza. Horrela, p_i probabilitatearekin x_i balioa hartzen duela pentsatuko dugu, $i = 1, 2, \dots, n$. Horrela,

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^n p_i x_i,$$

eta beraz,

$$\psi(\mathbb{E}[X]) = \psi\left(\sum_{i=1}^n p_i x_i\right).$$

Orain, ψ konbexua izateagatik¹,

$$\psi\left(\sum_{i=1}^n p_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n p_i \psi(x_i).$$

Eta frogapena bukatu da kontuan hartuz $\sum_{i=1}^n p_i \psi(X_i) = \mathbb{E}[\psi(X)]$ dela. $\square$

Ohartu $\psi(x) = x^2$ hartzen badugu, Jensen-en emaitzagatik oinarritzko probabilitatean ikusitako ondoko ezberdintza lortzen dugula:

$$\mathbb{E}[X^2] \geq (\mathbb{E}[X])^2.$$

3.6 Bariantza eta Kobariantza

Atal honetako zorizko aldagai guztiak probabilitate espazio berdinean egongo dira definituta eta errealak eta integagarriak izango dira, hau da, $X^2 \in \mathcal{L}_1$.

Gogoratu X zorizko aldagaiaren bariantza $Var[X] = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2]$ dela. Gainera, bariantzaren unitateak karratuan adierazten dira eta $Var[X] \geq 0$ ematen da. Orain, bariantzaren zenbait propietate azalduko dugu.

Ondoko emaitzak frogatzen du $Var[X]$ zero denean, X konstantea dela ia ziurrenik, hau da, existitzen dela k non $\mathbb{P}(X = k) = 1$. Edo beste modu batean esanda, X -k konstante horrekiko ezberdinak diren balioak hartu ahal ditu, baino balio horiek hartzeko probabilitatea zero da.

3.6.1 Lema. $Var[X] = 0$ bada, orduan X -k konstante baten balioa du ia ziurrenik.

Frogapena.

$$Var[X] = 0 \Rightarrow \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = 0 \Rightarrow (X - \mathbb{E}[X])^2 \stackrel{i.z.}{=} 0 \Rightarrow X - \mathbb{E}[X] \stackrel{i.z.}{=} 0.$$

Beraz, X ia ziurrenik konstante bat da, hau da, $\mathbb{E}[X]$. $\square$

3.6.2 Lema. $Var[X] < \infty \iff X \in \mathcal{L}_2$.

Frogapena.

$$Var[X] < \infty \iff X - \mathbb{E}[X] \in \mathcal{L}_2 \iff X - \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[X] \in \mathcal{L}_2 \iff X \in \mathcal{L}_2.$$

$\square$

Bestalde, oinarritzko probabilitateko emaitza ezaguna da bariantza ere ondoko moduan adierazi daitekeela: $Var[X] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2$.

Orain, kobariantza definituko dugu.

¹ ψ konbexua izateak, $n = 2$ -rako, hau esan nahi du: $\psi(px_1 + (1-p)x_2) \leq p\psi(x_1) + (1-p)\psi(x_2)$.

3.6.1 Definizioa.

$$\text{Cov}[X, Y] = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])].$$

Ohartu $X, Y \in \mathcal{L}_2$ bada, orduan $X - \mathbb{E}[X] \in \mathcal{L}_2$ eta $Y - \mathbb{E}[Y] \in \mathcal{L}_2$. Ondorioz, Cauchy-Schwartz-en ezberdintza erabiliz,

$$\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])] \leq \sqrt{\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2]} \sqrt{\mathbb{E}[(Y - \mathbb{E}[Y])^2]} < \infty.$$

Beraz, $X, Y \in \mathcal{L}_2$ bada, orduan $(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y]) \in \mathcal{L}_1$ ematen da.

3.6.2 Definizioa. Demagun $X, Y \in \mathcal{L}_2$ dela. Orduan, X eta Y koerlazioz gabekoak direla esango dugu $\text{Cov}[X, Y] = 0$ bada.

3.7 Frogapenak**3.7.1 Markov-en ezberdintzen frogapena**

Lehenik, goi-borna frogatuko dugu.

$$\mathbb{E}[|X|^r] = \int_{\Omega} |X|^r dP = \int_{(|X| \geq \epsilon)} |X|^r dP + \int_{(|X| < \epsilon)} |X|^r dP.$$

Ohartu $|X|^r 1_{X < \epsilon} \geq 0$ dela eta, ondorioz,

$$\int_{(|X| < \epsilon)} |X|^r dP = \mathbb{E}[|X|^r 1_{X < \epsilon}] \geq 0.$$

Horrela,

$$\mathbb{E}[|X|^r] \geq \int_{(|X| \geq \epsilon)} |X|^r dP \geq \int_{(|X| \geq \epsilon)} \epsilon^r dP = \epsilon^r \int_{(|X| \geq \epsilon)} dP = \epsilon^r P(|X| \geq \epsilon).$$

Orain, bigarren ezberdintza frogatuko dugu:

$$\mathbb{E}[|X|^r] = \int_{\Omega} |X|^r dP = \int_{(|X| > \epsilon)} |X|^r dP + \int_{(|X| \leq \epsilon)} |X|^r dP.$$

Gainera, $|X| \leq k$ denez,

$$\int_{(|X| > \epsilon)} |X|^r dP \leq k^r \int_{(|X| > \epsilon)} dP = k^r P(|X| > \epsilon),$$

eta bestalde

$$\int_{(|X| \leq \epsilon)} |X|^r dP \leq \epsilon^r \int_{(|X| \leq \epsilon)} dP = \epsilon^r P(|X| \leq \epsilon).$$

Horregatik,

$$\mathbb{E}[|X|^r] \leq k^r P(|X| > \epsilon) + \epsilon^r P(|X| \leq \epsilon) = k^r P(|X| > \epsilon) + \epsilon^r (1 - P(|X| > \epsilon)).$$

Eta goiko adierazpenetik bigarren ezberdintza lortzen da.

3.8 Ariketak

3.8.1 Ariketa. *Izan bedi X zorizko aldagai konplexua. Frogatu*

$$\sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(|X| \geq n) \leq \mathbb{E}[|X|] \leq \sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(|X| \geq n).$$

Ondorioz, X integragarria da $\sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(|X| \geq n) < \infty$ bada.

3.8.2 Ariketa. *Demagun $N, X_1, X_2, \dots$ zorizko aldagai independenteak direla non N -ren irudia $\{0, 1, 2, \dots\}$ den eta $X_1, X_2, \dots$ berdinki banatuta dauden. Suposatu N eta X_i integragarriak direla. Orduan, $Y = \sum_{i=1}^N X_i$ integragarria dela frogatu.*

3.8.3 Ariketa. *Demagun X eta Y zorizko aldagai independenteak direla eta $\mathbb{E}[X]$ existitzen dela. Orduan, edozein $B \in \mathcal{B}$ -rako,*

$$\int_{(Y \in B)} X d\mathbb{P} = \mathbb{E}[X] \mathbb{P}(Y \in B)$$

3.8.4 Ariketa. *Ondokoa frogatu: edozein a eta t erreal positibotarako,*

$$\mathbb{P}(|X| \geq a) \leq e^{-at} \mathbb{E}[e^{t|X|}].$$

3.8.5 Ariketa. *Izan bedi $r > 1$. Frogatu ondokoak $\mathbb{E} \left[\left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \right|^r \right]$ -ren goi-bornak direla:*

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[|X_i|^r], \quad \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\mathbb{E}[|X_i|^r])^{\frac{1}{r}} \right)^r.$$

Zein da goi-bornarik onena?

3.8.6 Ariketa. *Demagun $A, B \in \mathcal{B}$. Frogatu 1_A eta 1_B koerlazio gabekoak direla baldin eta soilik baldin A eta B independenteak badira.*

4

Funtzio Karakteristikoak

Kapitulu honetan, funtzio karakteristikoa zer den ikasiko dugu, baita haren propietateak ere. Funtzio karakteristikoak lagungarriak dira zorizko aldagaien ezaugarriak aztertze-ko. Gainera, hurrengo kapituluan aurkeztuko dugu zorizko aldagaien konbergentzia aztertze-ko ere baliogarriak direla.

4.1 Definizioak

Has gaitezen zenbait definizio ikusten.

4.1.1 Definizioa. *Demagun X zorizko aldagaia dela non $\text{Irudi}(X) \subset \{0, 1, \dots\}$. X -ren probabilitate funtzio sortailea ondokoa da*

$$g_X(t) = \mathbb{E}[t^X].$$

Frogatu daiteke, probabilitate funtzio sortailea ezagututa, probabilitateak lortu daitezkeela ondoko formula erabiliz:

$$\mathbb{P}(X = n) = \frac{1}{n!} g_X^{(n)}(t)|_{t=0}.$$

Horrela, adibidez, $g_X(t) = \frac{2}{5}t + \frac{3}{5}t^3$ badugu, ikusi daiteke X -ren banaketa ondokoa dela: $P(X = 1) = \frac{2}{5}$ eta $P(X = 3) = \frac{3}{5}$.

4.1.2 Definizioa. *X zorizko aldagai erreala bada, orduan ondokoari X -ren funtzio karakteristikoa deitzen zaio:*

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}[e^{itX}], \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Ohartu ondo definituta dagoela funtzio karakteristikoa; izan ere $|e^{itX}| = 1 < \infty$, beraz e^{itX} integragarria da (hau da, e^{itX} -ren itxaropena existitzen da).

Bestalde, funtzio karakteristikoa aldagai errealeko funtzio konplexua da, hau da, $\varphi_X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$; izan ere,

$$\begin{aligned} \varphi_X(t) &= \int_{\Omega} e^{itX} d\mathbb{P} = \int_{\Omega} (\cos(tX) + i \sin(tX)) d\mathbb{P} = \int_{\Omega} \cos(tX) d\mathbb{P} + i \int_{\Omega} \sin(tX) d\mathbb{P} = \\ &= \operatorname{Re}(\psi(t)) + i \operatorname{Im}(\psi(X)). \end{aligned}$$

Beste propietate garrantzitsu bat da ondokoa da. Bi zorizko aldagai X eta Y berdinki banatuta badaude, orduan $\varphi_X = \varphi_Y$ ematen da. Honen arrazoia da, bi zorizko aldagai berdinki banatuta badaude, haien itxaropena berdina dela. Aurrerago aurkeztuko dugu beste inplikazioa ere egiazkoa dela; hau da, $\varphi_X = \varphi_Y$ ematen bada, orduan X eta Y berdinki banatuta daudela.

Funtzio karakteristikoaren kalkuluari dagokionez, oso erraza da X -k $0, 1, 2, \dots$ balioak baino ez baditu hartzen; izan ere,

$$\varphi_X(t) = g_X(e^{it}).$$

Esate baterako, $X \sim \operatorname{Bin}(n, p)$ bada,

$$g_X(t) = \sum_{k=0}^n t^k \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=0}^n t^k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (tp)^k (1-p)^{n-k} = (tp + q)^n,$$

eta ondorioz, $\varphi_X(t) = (pe^{it} + q)^n$.

Zorizko aldagai orokorragoetan, itxaropenaren balioa kalkulatu behar da. Esate baterako, $X \sim \operatorname{Exp}(\lambda)$ bada, orduan

$$\varphi_X(t) = \int_0^{\infty} e^{itx} \lambda e^{-\lambda x} dx = \lambda \int_0^{\infty} e^{(it-\lambda)x} dx = \frac{-\lambda}{it - \lambda}.$$

Beste kasu interesgarri bat $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ denean ematen da. Kasu honetako funtzio karakteristikoa honakoa da: $\varphi_X(t) = e^{-t^2/2}$. Ikusi [4.6.1](#) atala.

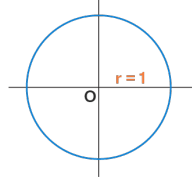
4.2 Oinarrizko Propietateak

Orain, funtzio karakteristikoaren zenbait propietate frogatuko dugu:

1. $\varphi_X(0) = 1$. Izan ere,

$$\varphi_X(0) = \mathbb{E}[e^0] = 1.$$

2. $|\varphi_X(t)| \leq 1$. Izan ere,



$$|\varphi_X(t)| = |\mathbb{E}[e^{itX}]| \leq \mathbb{E}[|e^{itX}|] = \mathbb{E}[1] = 1.$$

Propietate honen ondorioz, esan daiteke funtzio karakteristikoaren balio absolutua plano konplexuko 1 erradiodun zirkuluaren barruan egongo dela.

3. φ_X uniformeki jarraitua da $\mathbb{R}$ -n. Frogapena 4.6.2 atalean dago.

4. $\varphi_{aX+b}(t) = e^{itb} \varphi_X(at)$. Izan ere,

$$\mathbb{E}[e^{(aX+b)it}] = \mathbb{E}[e^{aXit} e^{bit}] = e^{bit} \mathbb{E}[e^{aXit}] = e^{bit} \varphi_X(at).$$

Emaitza honen ondorioz, $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ bada eta $Y = \sigma X + \mu$ bada, orduan $Y \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$ lortzen dugu. Beraz, $\varphi_X(t) = e^{-t^2/2}$ denez,

$$\varphi_Y(t) = e^{it\mu} \varphi_X(\sigma t) = e^{it\mu} e^{-(\sigma t)^2/2} = e^{it\mu - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}.$$

5. $\varphi_{-X}(t) = \overline{\varphi_X(t)}$. Izan ere,

$$\varphi_{-X}(t) = \mathbb{E}[e^{-itX}] = \mathbb{E}[\cos(-tX) + i \sin(-tX)] = \mathbb{E}[\cos(tX)] - i \mathbb{E}[\sin(tX)] = \overline{\varphi_X(t)}.$$

Emaitza honen ondorioz, ondokoa lortzen dugu: X simetrikoa bada, orduan $\varphi_X(t)$ funtzio erreala da (hau da, haren zati konplexua zero da). Izan ere, X simetrikoa izateagatik

$$\varphi_X(t) = \varphi_{-X}(t), \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

eta frogatu dugunez $\varphi_{-X}(t) = \overline{\varphi_X(t)}$ dela, $\varphi_X(t) = \overline{\varphi_X(t)}$ dela lortu dugu; alegia, $\varphi_X(t)$ funtzio erreala da.

6. Demagun $X_1, X_2, \dots, X_n$ zorizko aldagai independenteak eta definitu $Y = \sum_{i=1}^n X_i$. Orduan $\varphi_Y(t) = \prod_{i=1}^n \varphi_{X_i}(t)$, edozein $t \in \mathbb{R}$ -rako. Izan ere,

$$\varphi_Y(t) = \mathbb{E}[e^{itY}] = \mathbb{E}[e^{it(X_1 + \dots + X_n)}] \stackrel{\text{inde}}{=} \mathbb{E}[e^{itX_1}] \dots \mathbb{E}[e^{itX_n}].$$

Horrela, zorizko aldagaiek banaketa berdina badute (hau da, X_i guztien funtzio karakteristikoa $\varphi_X(t)$ bada), $\varphi_Y(t) = (\varphi_X(t))^n$.

4.3 Funtzio karakteristikoaren Deribatuak eta Momentuak

Orain, imaginatu integrala eta deribatua t -rekiko ordenez aldatu ahal direla. Orduan,

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{\Omega} e^{itX} d\mathbb{P} \right) = \int_{\Omega} \frac{d}{dt} (e^{itX}) d\mathbb{P},$$

eta ondorioz,

$$\varphi'_X(t) = \int_{\Omega} iX e^{itX} d\mathbb{P}, \varphi''_X(t) = \int_{\Omega} (iX)^2 e^{itX} d\mathbb{P}, \dots, \varphi_X^{(k)}(t) = \int_{\Omega} (iX)^k e^{itX} d\mathbb{P}.$$

Horregatik, ondoko propietatea lortuko genuke: $\varphi_X^{(k)}(0) = i^k \mathbb{E}[X^k]$.

Ondoko emaitzak adieraziko digu noiz integrala eta deribatua t -rekiko ordenez aldatu ahal diren.

4.3.1 Lema. *Demagun $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ probabilitate espazioa eta I tarte bat direla. Suposatu $f : I \times \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ dela, non*

- $\forall t \in I, f(t, \cdot) : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ zorizko aldagai integragarria da
- $\forall \omega \in \Omega, f(\cdot, \omega) : I \rightarrow \mathbb{C}$ deribagarria da
- existitzen da $g : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ zorizko aldagai ez-negatiboa eta integragarria non

$$\left| \frac{d}{dt} \int_{\Omega} f(t, \omega) d\mathbb{P}(\omega) \right| \leq g(\omega), \quad \forall (t, \omega) \in I \times \Omega.$$

Orduan,

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} f(t, \omega) d\mathbb{P}(\omega) = \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} f(t, \omega) d\mathbb{P}(\omega).$$

Frogapenaren ideia konbergentzia monotonoaren teorema erabiltzea da. Ez dugu goiko emaitza hau frogatuko. Aldiz, jarraian dugun emaitza frogatzeko erabiliko dugu.

4.3.1 Proposizioa. *Suposatu $\mathbb{E}[|X|^n] < \infty$ dela. Orduan, φ_X n aldiz deribagarria da $\mathbb{R}$ -n eta, gainera, $k = 1, \dots, n$ eta $\forall t \in \mathbb{R}$,*

$$\varphi_X^{(k)}(t) = \int_{\Omega} (iX)^k e^{itX} d\mathbb{P}.$$

Ondorioz, $\varphi_X^{(k)}(0) = i^k \mathbb{E}[X^k]$, $k = 1, \dots, n$.

Frogapena. Aurreko lema aplikatuko dugu $f(t, \omega) = e^{itX(\omega)}$ hartuz. Lehenik, badakigu e^{itX} integragarria dela. Gainera, e^{itX} deribagarria da edozein t errealerako. Bukatzeko,

$$\left| \frac{\partial}{\partial t} f(t, \omega) \right| = |iX(\omega) e^{itX(\omega)}| = |X(\omega)| = g(\omega),$$

eta g integragarria da $|X| \in \mathcal{L}_n$ delako. Ondorioz, aurreko lemaen baldintzak betetzen dira eta, horregatik,

$$\varphi'_X(t) = \int_{\Omega} iX(\omega) e^{itX(\omega)} d\mathbb{P}(\omega).$$

Bigarren deribaturako, $f(t, \omega) = iX(\omega) e^{itX(\omega)}$ hartu eta aurreko lemaen baldintzak betetzen direla frogatu behar da. Hori egin ondoren,

$$\varphi''_X(t) = \int_{\Omega} (iX(\omega))^2 e^{itX(\omega)} d\mathbb{P}(\omega).$$

Eta hurrengo deribatuetarako berdin. Izan ere, k -garren deribaturako, ondokoa dugu:

$$\varphi_X^{(k)}(t) = \int_{\Omega} (iX(\omega))^k e^{itX(\omega)} d\mathbb{P}(\omega).$$

Ohartu n -garren deribatura arte egin daitekela hau $X \in \mathcal{L}_n$ izateagatik.

Bukatzeko, $k = 1, \dots, n$ bada,

$$\varphi_X^{(k)}(0) = \int_{\Omega} (iX(\omega))^k e^{i \cdot 0 \cdot X(\omega)} d\mathbb{P}(\omega) = i^k \int_{\Omega} X(\omega)^k d\mathbb{P}(\omega) = i^k \mathbb{E}[X^k].$$

□

Goiko emaitzaren propietateez gain, froga daiteke $\varphi'_X, \varphi''_X, \dots, \varphi_X^{(n)}$ uniformeki jarraituak direla $\mathbb{R}$ -n; frogapena 4.2 Ataleko 3. propietatearen frogapenaren antzekoa da, beraz ez dugu egingo.

Aurreko proposizio honen ondorioz, ondoko korolaria dugu:

4.3.1 Korolaria. $\mathbb{E}[|X|^n] < \infty$ bada, orduan $\varphi_X(t) = \sum_{k=0}^n \frac{i^k \mathbb{E}[X^k]}{k!} t^k + o(t^n)$, $t \rightarrow 0$ denean.

Adibidez, $X \in \mathcal{L}_2$ bada eta $\mathbb{E}[X] = \mu$ eta $\mathbb{E}[X^2] = \sigma^2$ badira,

$$\phi_X(t) = 1 + i\mu t + \frac{(i\sigma t)^2}{2} + o(t^2) = 1 + i\mu t - \frac{\sigma^2 t^2}{2} + o(t^2),$$

$t \rightarrow 0$ denean.

4.4 Inbertsio Formulak

Funtzio karakteristikoaren definizioa erabiliz, edozein zorizko aldagaiaren funtzio karakteristikoa kalkulatu ahal dugu. Orain, ondoko galdera egin dezakegu: eta alderantzizkoa posiblea da? Alegia, φ_X ezagutuz gero, esan daiteke zerbait X -ren banaketari buruz? Inbertsio formularen bidez, φ_X -ren balioak erabiliz X -ren banaketaren balioak lortu daitezke.

Lehenik, suposatuko dugu X zorizko aldagaiak balio osoak baino ez dituela hartzen.

4.4.1 Proposizioa. *Izan bedi X zorizko aldagaia. Suposatu $\text{Irudi}(X) \subset \mathbb{Z}$. Orduan $n \in \mathbb{Z}$ bada,*

$$\mathbb{P}(X = n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-itn} \varphi_X(t) dt.$$

Frogapena. Badakigu $\varphi_X(t) = \int_{\Omega} e^{itX} d\mathbb{P}$ eta $\Omega = \cup_{m \in \mathbb{Z}} (X = m)$. Orduan,

$$\int_0^{2\pi} e^{-itn} \varphi_X(t) dt = \int_0^{2\pi} e^{-itn} \left(\int_{\Omega} e^{itX} d\mathbb{P} \right) dt = \int_0^{2\pi} \left(\int_{\Omega} e^{it(X-n)} d\mathbb{P} \right) dt.$$

Orain, azkenengo adierazpenak Fubiniaren Teoremaren baldintzak betetzen dituela egiaztatuko dugu.

- $e^{it(X-n)} \geq 0$.
- $\int_0^{2\pi} \left(\int_{\Omega} |e^{it(X-n)}| d\mathbb{P} \right) dt = \int_0^{2\pi} \left(\int_{\Omega} 1 d\mathbb{P} \right) dt = \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi < \infty$.

Horregatik, bi integralak ordenez aldatu ahal dira:

$$\int_0^{2\pi} \left(\int_{\Omega} e^{it(X-n)} d\mathbb{P} \right) dt = \int_{\Omega} \left(\int_0^{2\pi} e^{it(X-n)} d\mathbb{P} \right) dt = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \int_{(X=m)} \left(\int_0^{2\pi} e^{it(m-n)} d\mathbb{P} \right) dt.$$

Orain, ohartuko gara edozein $m \neq n$ -rako

$$\int_0^{2\pi} e^{it(m-n)} d\mathbb{P} = \frac{e^{it(m-n)}}{i(m-n)} \Big|_0^{2\pi} = 0.$$

Ondorioz,

$$\begin{aligned} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \int_{(X=m)} \left(\int_0^{2\pi} e^{it(m-n)} d\mathbb{P} \right) dt &= \int_{(X=n)} \left(\int_0^{2\pi} e^{it(n-n)} d\mathbb{P} \right) dt = \\ &= \int_{(X=n)} \left(\int_0^{2\pi} 1 d\mathbb{P} \right) dt = \int_{(X=n)} 2\pi dt = 2\pi \mathbb{P}(X = n), \end{aligned}$$

eta frogatu dugu nahi genuena.

□

Orain, Levy-ren inbertsio formula aurkeztuko dugu.

4.4.2 Proposizioa (Levy-ren inbertsio formula). *Izan bedi X zorizko aldagaia jarraitua dela, haren banaketa funtzioa F izanik. Demagun a eta b ($a < b$) direla. Orduan,*

$$\mathbb{P}(a < X < b) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} \varphi_X(t) dt. \quad (4.1)$$

Goiko emaitza honek ondorio garrantzitsu bat du. Izan ere, (4.1)-ri erreparatuz, ezkerreko zatia X -ren banaketa funtzioaren balioak dira; eskubikoak, aldiz, φ_X finkatzen

badugu, balio bakarra du. Hortaz, esan daiteke funtzio karakteristikoaren bakartasuna frogatzea lortu dugula, ondoko emaitzan azaltzen den bezala.

4.4.1 Korolarioa (Funtzio karakteristikoaren Bakartasun Teorema). *Demagun X eta Y zorizko aldagaiak direla. Orduan, $\varphi_X = \varphi_Y$ baldin eta soilik baldin $F_X = F_Y$.*

Frogapena. Suposatu $F_X = F_Y$ dela. Beraz, X eta Y berdinki banatuta daude. 4.1.2 Definizioagatik, $\varphi_X = \varphi_Y$ dugu.

Orain, suposatu $\varphi_X = \varphi_Y$ dugula eta, aurretik esandakoagatik, X eta Y berdinki banatuta daude. $\square$

Levy-ren inbertsio formularen ondorioz, ondoko emaitza ere dugu. Gogoratu X simetrikoa dela X eta $-X$ zorizko aldagaiak berdinki banatuta badaude. Banaketa normala, esate baterako, simetrikoa da.

4.4.2 Korolarioa. φ_X bikoitia $\iff X$ simetrikoa.

Frogapena. Suposatu X simetrikoa dela, hau da, X eta $-X$ banaketa berdina dutela. Beraz, $\varphi_X = \varphi_{-X}$ dugu. Bestalde, $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$\varphi_{-X}(t) = \mathbb{E}[e^{it(-X)}] = \varphi_X(-t).$$

Hori dela eta, $\varphi_X(t) = \varphi_X(-t)$ dugu edozein t errealerako, hau da, funtzio karakteristikoa funtzio bikoitia da.

Orain suposatu φ_X bikoitia dela, hau da, $\forall t \in \mathbb{R} \varphi_X(t) = \varphi_X(-t)$. Gainera, badakigu $\varphi_{-X}(t) = \varphi_X(-t)$ dela; beraz, $\varphi_X(t) = \varphi_{-X}(t)$ dugu eta 4.4.1 Korolarioaren emaitzagatik, $F_X = F_{-X}$ ematen da, hau da, X eta $-X$ berdinki banatuta daude (eta, orduan X simetrikoa da). $\square$

4.5 Funtzio karakteristikoaren Identifikazioa

Arestian esandako guztiagatik, badakigu funtzio karakteristikoa aldagai errealeko funtzio konplexu bat dela. Orain, aldagai errealeko funtzio konplexu bat badugu, nahi dugu jakin zorizko aldagai baten funtzio karakteristikoa bada. Horrela, ondoko teorema erabiliko dugu.

4.5.1 Teorema (Polya-ren Teorema). *Izan bedi $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$. Orduan, φ zorizko aldagai baten funtzio karakteristikoa izango da ondoko propietateak betetzen badira:*

- $\varphi(0) = 1$
- φ jarraitua da $t = 0$ puntuan
- φ funtzio bikoitia da
- φ beherakorra eta konbexua da $[0, \infty)$ tartean

Teorema hau erabiliz, esan daiteke $\varphi(t) = \frac{1}{1+|t|^\alpha}$ zorizko aldagai baten funtzio karakteristikoa dela; izan ere, lau propietateak betetzen ditu. Orain, ildo bereko beste teorema bat aurkeztuko dugu.

4.5.2 Teorema (Levy-Cramer-en Teorema). *Izan bedi $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$. Orduan, ondoko baieztapenak baliokideak dira:*

- φ zorizko aldagai baten funtzio karakteristikoa da.
- φ jarraitua da $t = 0$ puntuan eta existitzen da funtzio karakteristikoaren segida bat $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ non

$$\varphi(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

4.5.1 Adibidea. *Izan bedi $\alpha \in (0, 1]$. Frogatu $\varphi(t) = e^{-|t|^\alpha}$ zorizko aldagai baten funtzio karakteristikoa dela.*

Lehendabizi, argi dago $\varphi(t)$ jarraitua dela $t = 0$ puntuan. Orain, badakigu

$$e^{|t|^\alpha} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{|t|^\alpha}{n} \right)^n,$$

eta beraz

$$e^{-|t|^\alpha} = \frac{1}{e^{|t|^\alpha}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 + \frac{|t|^\alpha}{n}} \right)^n.$$

Bestalde, aurreko adibidearen antzeko moduan frogatzen da $\frac{1}{1 + \frac{|t|^\alpha}{n}}$ zorizko aldagai baten funtzio karakteristikoa dela. Orduan, zorizko aldagai hauek n aldiz batuz (eta independenteak badira), ondoko funtzio karakteristikoa lortzen dugu: $\left(\frac{1}{1 + \frac{|t|^\alpha}{n}} \right)^n$. Eta, horrela, n infinitoruntz jotzen duenean, $e^{-|t|^\alpha}$ dugu.

4.6 Frogapenak

4.6.1 $\mathcal{N}(0, 1)$ banaketaren funtzio karakteristikoa

Lehendabizi $\varphi_X(t)$ aztertuko dugu kasu honetarako.

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}[e^{itX}] = \mathbb{E}[\cos(tX) + i \sin(tX)] = \mathbb{E}[\cos(tX)] + i \mathbb{E}[\sin(tX)] = \mathbb{E}[\cos(tX)],$$

non azkenengo berdintza $\mathbb{E}[\sin(tX)] = 0$ izateagatik ematen den. Hori ikusteko,

$$\mathbb{E}[\sin(tX)] = \int_{-\infty}^{\infty} \sin(tX) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx,$$

eta ohartuko gara $\sin(tX) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ funtzio bakoitia dela eta, beraz, bere integrala minus infinitutik plus infinitura zero dela. Bestalde,

$$\mathbb{E}[\cos(tX)] = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(tX) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx. \quad (4.2)$$

Orain, $\varphi'_X(t)$ aztertuko dugu.

$$\varphi'_X(t) = \frac{d}{dt} \mathbb{E}[e^{itX}].$$

Ohartu $|\frac{d}{dt} e^{itX}| = |iX e^{itX}| = |X|$ betetzen dela eta, gainera, X integragarria dela. Orduan,

$$\frac{d}{dt} \mathbb{E}[e^{itX}] = \mathbb{E}\left[\frac{d}{dt} e^{itX}\right] = \mathbb{E}[iX e^{itX}] = i\mathbb{E}[x \cos(tx)] - \mathbb{E}[x \sin(tx)].$$

Ondoren, $x \cos(tX) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ funtzio bakoitia izateagatik,

$$\mathbb{E}[x \cos(tX)] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cos(tx) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 0.$$

Ondorioz,

$$\frac{d}{dt} \mathbb{E}[e^{itX}] = -\mathbb{E}[x \sin(tX)] = -\int_{-\infty}^{\infty} x \sin(tx) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \sin(tx) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{d}{dx} e^{-\frac{x^2}{2}}\right) dx.$$

Azken integrala zatika integratuz, $u = \sin(tx)$ eta $dv = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{d}{dx} e^{-\frac{x^2}{2}}\right)$ izanik,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sin(tx) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{d}{dx} e^{-\frac{x^2}{2}}\right) dx = \left[\sin(tx) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \right]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} t \cos(tx) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = -t\varphi_X(t).$$

Beraz, (4.2) erreparatuz, frogatu dugu $\varphi'_X(t) = -t\varphi(t)$ betetzen dela eta ekuazio difentzial honen soluzio bakarra, $\varphi(0) = 1$ betetzen duena da, hots, $\varphi_X(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$ da.

4.6.2 $\varphi_X(t)$ uniformeki jarraitua da $\mathbb{R}^n$

Frogatu nahi duguna da $|\varphi_X(t+h) - \varphi_X(t)| \rightarrow 0$, h -k zeroruntz jotzen duenean edozein t errealerako. Hartu edozein $t \in \mathbb{R}$. Lehenik,

$$\varphi_X(t+h) = \int_{\Omega} e^{iX(t+h)} d\mathbb{P}, \quad \varphi_X(t) = \int_{\Omega} e^{itX} d\mathbb{P}.$$

Beraz, $\varphi_X(t+h) - \varphi_X(t) = \int_{\Omega} e^{itX} (e^{ihX} - 1) d\mathbb{P}$.

Hirugarren kapituluan, $|\mathbb{E}[X]| \leq \mathbb{E}[|X|]$ ematen dela frogatu dugu. Hortaz,

$$|\varphi_X(t+h) - \varphi_X(t)| = \left| \int_{\Omega} e^{itX} (e^{ith} - 1) d\mathbb{P} \right| \leq \int_{\Omega} |e^{itX}| |e^{ith} - 1| d\mathbb{P} = \int_{\Omega} |e^{ith} - 1| d\mathbb{P},$$

azkenengo berdintza egia izanik $|e^{itX}| = 1$ baita.

Bukatzeko, frogatuko dugu $\int_{\Omega} |e^{ith} - 1| d\mathbb{P} \rightarrow 0$, $h \rightarrow 0$ denean. Desberdintza triangeluarragatik,

$$|e^{ith} - 1| \leq |e^{ith}| + 1 = 2,$$

eta 2 integragarria da, beraz, konbergentzia menderatuaren teoremagatik,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{\Omega} |e^{ith} - 1| d\mathbb{P} = \int_{\Omega} \lim_{h \rightarrow 0} |e^{ith} - 1| d\mathbb{P} = 0.$$

4.6.3 Levy-ren inbertsio formularen frogapenaren laburpena

Definitu:

$$I_T(a, b) = \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} \varphi_X(t) dt.$$

Gainera,

$$\varphi_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x) dx,$$

eta ordezkatzuz:

$$I_T(a, b) = \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x) dx \right] dt.$$

Fubini-ren Teoremaren baldintzak betetzen dira (ez dugu frogatuko) eta, horregatik, integralak trukutzen dira:

$$I_T(a, b) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \left[\int_{-T}^T \frac{e^{it(x-a)} - e^{it(x-b)}}{it} dt \right] dx.$$

Ondoko propietatea ematen da:

$$\int_{-T}^T \frac{e^{itu}}{it} dt = 2 \int_0^T \frac{\sin(tu)}{t} dt,$$

eta hortaz

$$\int_{-T}^T \frac{e^{it(x-a)} - e^{it(x-b)}}{it} dt = 2 \int_0^T \frac{\sin(t(x-a)) - \sin(t(x-b))}{t} dt.$$

Orain, ondoko propietatea erabiliko dugu:

$$\int_0^\infty \frac{\sin(ku)}{u} du = \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn}(k),$$

eta $T \rightarrow \infty$ eginez:

$$2 \int_0^T \frac{\sin(t(x-a)) - \sin(t(x-b))}{t} dt \longrightarrow \frac{\pi}{2} (\operatorname{sgn}(x-a) - \operatorname{sgn}(x-b)).$$

Ondoko kasuak aztertuko ditugu:

$$\operatorname{sgn}(x-a) - \operatorname{sgn}(x-b) = \begin{cases} 0, & x < a, \\ 2, & a < x < b, \\ 0, & x > b, \end{cases}$$

beraz

$$2 \int_0^T \frac{\sin(t(x-a)) - \sin(t(x-b))}{t} dt \longrightarrow \pi \mathbf{1}_{(a,b)}(x).$$

Bukatzeko,

$$I_T(a,b) \longrightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \pi \mathbf{1}_{(a,b)}(x) dx = \int_a^b f(x) dx = \mathbb{P}(a < X < b).$$

4.7 Ariketak

4.7.1 Ariketa. Demagun $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$, non $X_i \sim U(-1, 1)$, $i = 1, \dots, n$ eta independenteak diren. Frogatu $\varphi_{S_n}(t) = \frac{\sin^n(t)}{t^n}$.

4.7.2 Ariketa. Demagun X zorizko aldagaia dela, non p probabilitatearekin 1 balioa hartzen du eta, bestela, -1 balioa. Kalkulatu $\varphi_X(t)$ eta frogatu $p = 0.5$ denean $\varphi_X(t) = \cos(t)$ dela.

4.7.3 Ariketa. Demagun $X \sim \Gamma(a, k)$ eta $Y \sim \Gamma(a, l)$ eta independenteak direla. Funtzio karakteristikoak erabiliz, frogatu $X + Y \sim \Gamma(a, k + l)$ (Laguntza: $X \sim \Gamma(a, k)$ bada, orduan $X = W_1 + W_2 + \dots + W_k$, non $W_i \sim \operatorname{Exp}(a)$, $i = 1, \dots, k$ eta independenteak diren).

4.7.4 Ariketa. Demagun $X \sim \mathcal{N}(\mu_X, \sigma_X)$ eta $Y \sim \mathcal{N}(\mu_Y, \sigma_Y)$ eta independenteak direla. Zein da $X + Y$ -ren banaketa?

4.7.5 Ariketa. Demagun X eta Y independenteak direla eta Y simetrikoa dela. Frogatu $U = X + Y$ eta $V = X - Y$ berdinki banatuta daudela. X eta Y Cauchy-ren banaketa jarraitzen badute, esan daiteke U eta V independenteak direla? (Laguntza: Cauchy-ren banaketa jarraitzen duen funtzio karakteristikoa $e^{-|t|}$ da.)

4.7.6 Ariketa. *Polya-ren eta Levy-Cramer-en Teoremak erabili gabe, ondoko galderak erantzun:*

1. *Esan daiteke $\varphi(t) = \sin(t)$ zorizko aldagai baten funtzio karakteristikoa denik? Eta $\varphi(t) = 1 + \sin(t)$?*
2. *Badakigu $\varphi(t) = (\cos(t))^n$ zorizko aldagai baten funtzio karakteristikoa dela. Zein da zorizko aldagai hori?*

4.7.7 Ariketa. *Demagun X zorizko aldagaia dela eta $Z_n = X + Y_n$, non $\mathbb{P}(Y_n = 1) = \frac{1}{n}$ eta $\mathbb{P}(Y_n = 0) = 1 - \frac{1}{n}$ eta X eta Y_n independenteak diren. Frogatu Z_n -ren banaketa funtzioa $n \rightarrow \infty$ denean eta X -ren banaketa funtzioa berdinak direla.*

5

Konbergentzia

5.1 Sarrera

Orain arte, zorizko aldagaien segiden konbergentzia aztertu dugu modu zehatz batean. Alegia, $X_1, X_2, \dots$ probabilitate espazio berdinean definituriko zorizko aldagaiak badira, aztertu dugu X_n -ren balioa n infinitora doanean. Hau da, edozein $\omega \in \Omega$ -rako, $X_n(\omega)$ -ren balioa aztertu dugu $n \rightarrow \infty$ denean. Atal honetan, zorizko aldagaien segiden beste konbergentzia moduak aztertuko ditugu. Besterik esan ezean, suposatuko dugu zorizko aldagaiak $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ probabilitate espazioan definituta daudela.

5.2 Konbergentzia Ia-Ziurra

Lehenengo konbergentzia modua, ia-ziurra izenekoa da. Lehenik, gogora dezagun zer den baieztapen bat ia-ziur gertatzea.

5.2.1 Definizioa. *Zorizko esperimentu bati buruzko baieztapen bat ia-ziurrenik gertatzen da ondokoak betetzen badira:*

1. *Existitzen bada $N \in \mathcal{B}$ non $\mathbb{P}(N) = 0$*
2. *$\omega \notin N$ bada, orduan ω -k baieztapena betetzen du*

Definizio honi erreparatuz, esan daiteke baieztapen bat ia-ziurrenik gertatzen dela baieztapen hori beti betetzen bada, zero neurria duen multzo batean izan ezik. Ikus dezagun ondoko adibidea.

5.2.1 Adibidea. Txanpon bat infinitu aldiz botako dugu eta frogatuko dugu ia-ziurrekin gurutzeren bat lortuko dugula. Horretarako, frogatu behar dugu jaurtiketa guztietan aurpegia lortzeko probabilitatea zero dela. Hau da, X_i bada i . jaurtiketan lortutako emaitza, $\text{Irudi}(X_i) = \{A, G\}$, $\mathbb{P}(X_i = A) = p \in (0, 1)$ bada, orduan

$$\mathbb{P}(X_1 = A, \dots) \stackrel{\text{inde}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_1 = A)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} p^n = 0.$$

Beraz, ia-ziurrekin gurutzeren bat lortuko dugu.

Orain, konbergentzia ia-ziurra definituko dugu.

5.2.2 Definizioa. $X_1, X_2, \dots$ zorizko aldagaien segida bada, orduan X_n -k ia-ziurrekin konbergitzen du X -ra, existitzen bada $N \in \mathcal{B}$ non $P(N) = 0$ eta $\omega \notin N$ bada, orduan $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) = X(\omega)$. Horrela, X_n -k ia-ziurrekin konbergitzen badu X -ra, idatziko dugu $X_n \xrightarrow{i.z.} X$.

5.2.2 Adibidea. Hartu Lebesgueren probabilitate espazioa $[0, 1]$ tartean, $([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]), \lambda)$ eta definitu $X_n(\omega) = e^n$, $0 \leq \omega \leq \frac{1}{n}$ bada eta $X_n(\omega) = 0$ bestela. Frogatzeko $X_n \xrightarrow{i.z.} 0$, hartu $N = \{0\}$ eta badakigu $\mathbb{P}(N) = 0$ dela. Beraz, ikusten da $\forall \omega \in (0, 1]$, $X_n(\omega) \rightarrow 0$. Hortaz, $X_n \xrightarrow{i.z.} 0$ frogatu dugu. Hala ere, ohartu aurreko ataletan ikusitako konbergentzia modua ez dela ematen, hau da, ez da egia $X_n(\omega) \rightarrow 0$ dela edozein $\omega \in [0, 1]$ -rako. Hori ikusteko, $X_n(0) = e^n$ dugu eta, orduan, $X_n(0)$ ez da zero $n \rightarrow \infty$ denean.

5.3 Probabilitatezko Konbergentzia

Ondoko definizioarekin hasiko gara.

5.3.1 Definizioa. $X_1, X_2, \dots$ zorizko aldagaien segida bada, orduan X_n -k probabilitatean konbergitzen du X -ra, edozein $\epsilon > 0$ -rako, ondokoa betetzen bada:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|X_n - X| > \epsilon) = 0.$$

Horrela, X_n -k probabilitatean konbergitzen badu X -ra, idatziko dugu $X_n \xrightarrow{P} X$.

5.3.1 Adibidea. $X_n \sim \text{Exp}(n)$ bada, frogatuko dugu $X_n \xrightarrow{P} 0$. Izan ere, finkatu $\epsilon > 0$ eta

$$\mathbb{P}(|X_n - X| > \epsilon) = \mathbb{P}(|X_n - 0| > \epsilon) = \mathbb{P}(X_n > \epsilon) = e^{-n\epsilon} \rightarrow 0.$$

Gauza gehiago ikusten jarraitu aurretik, Inferentzia Estatistikoko kontzeptu bat berrikusiko dugu. Gogoratu θ estimatzeko hartutako estimatzaile bat $\theta^*(x_1, \dots, x_n)$ tinkoa dela ondokoa betetzen bada:

$$\mathbb{P}(|\theta^*(x_1, \dots, x_n) - \theta| > \epsilon) \rightarrow 0.$$

Atal honetan ikusitakoaren arabera, esan daiteke estimatzaile bat tinkoa dela probabilitatean konbergitzen badu estimatzen duen parametrora, hau da, $\theta^* \xrightarrow{P} \theta$ bada.

Ondoko emaitza, atal honetan ikusitako konbergentzia moduen arteko harremana adierazten du.

5.3.1 Proposizioa. $X_n \xrightarrow{i.z.} X$ bada, orduan $X_n \xrightarrow{P} X$.

Frogapena. Definitu

$$\theta = \{\omega \in \Omega : \lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) \neq X(\omega)\}.$$

Badakigu, $X_n \xrightarrow{i.z.} X$ ematen dela, beraz $\mathbb{P}(\theta) = 0$. Finkatu $\epsilon > 0$ eta definitu

$$A_n = \bigcup_{m \geq n} (|X_m - X| > \epsilon).$$

Frogatu nahi duguna da $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|X_n - X| > \epsilon) = 0$. Horrela,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|X_n - X| > \epsilon) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{n \geq 1} A_n\right),$$

goiko ezberdintza egia izanik $(|X_n - X| > \epsilon) \subset A_n$ delako eta berdintza $A_n \downarrow$ izateagatik. Horrela, nahikoa da $\mathbb{P}(\bigcap_{n \geq 1} A_n) = 0$ dela frogatzea. Horretarako, $\bigcap_{n \geq 1} A_n \subset \theta$ dela frogatuko dugu.

Izan bedi $\omega \notin \theta$, orduan $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) = X(\omega)$. Orduan, $\forall \epsilon > 0$, $\exists N$ non $\forall n \geq N$, $|X_n(\omega) - X(\omega)| < \epsilon$ eta, horregatik, $\omega \notin A_n \ \forall n \geq N$. Eta horrela, $\omega \notin \bigcap_{n \geq 1} A_n$ dela frogatu dugu. $\square$

Ondoko adibidean aurkeztuko dugu beste inplikazioaren kontradibide bat, hau da, beste inplikazioa ez dela egia beti.

5.3.2 Adibidea. Hartu $X_n = 1_{A_n}$ eta $A_1, A_2, \dots$ independenteak non $\mathbb{P}(A_n) = \frac{1}{n}$. Frogatuko dugu probabilitatean zerora konbergitzen duela, baina ia-ziurrenik ez.

$X_n \xrightarrow{P} 0$ dela ikusteko, ohartu edozein $\epsilon > 0$ -rako,

$$\mathbb{P}(|X_n - 0| > \epsilon) = \mathbb{P}(X_n > \epsilon).$$

Orain, $\epsilon \geq 1$ bada, orduan $\mathbb{P}(X_n > \epsilon) = 0$ edozein n -rako. Bestalde, $\epsilon \in (0, 1)$ bada,

$$\mathbb{P}(X_n > \epsilon) = \mathbb{P}(X_n = 1) = \mathbb{P}(A_n) = \frac{1}{n} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Bukatzeko, frogatuko dugu ez duela zerora konbergitzen ia-ziurrenik. Definitu $B = \{\omega \in \Omega | X_n(\omega) \rightarrow 0\}$, beraz frogatu nahi duguna da $\mathbb{P}(B) \neq 1$. Orduan,

$$\begin{aligned} B &= \{\omega \in \Omega | 1_{A_n}(\omega) \rightarrow 0\} = \{\omega \in \Omega | \exists n_0 \text{ non } \forall n \geq n_0 \ \omega \notin A_n\} = \bigcup_{n_0 \geq 1} \bigcap_{n \geq n_0} \bar{A}_n \\ &= \liminf_{n \rightarrow \infty} \bar{A}_n = \overline{\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n}. \end{aligned}$$

Orduan, $A_1, A_2, \dots$ independenteak dira eta

$$\sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(A_n) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} = \infty,$$

beraz Borel-Cantelliren bigarren lematik, $\mathbb{P}(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n) = 1$. Ondorioz, $\mathbb{P}(B) = 0 \neq 1$.

Orain, emaitza garrantzitsu bat aurkeztuko dugu.

5.3.1 Teorema (Zerbaki Handien Lege Ahula). Demagun $\{X_n : n \geq 1\}$ independenteak eta berdinki banatuak, non $\mathbb{E}[X_n] = \mu$ eta $\text{Var}[X_n] = \sigma^2$ finituak diren. Orduan, edozein ϵ positiborako

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left(\left| \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} - \mu \right| > \epsilon \right) = 0.$$

Frogapena. Markov-en ezberdintza, zorizko aldagaiak berdinki banatuta daudela eta bariantzaren definizioa erabiliz,

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left(\left| \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} - \mu \right| > \epsilon \right) &= \mathbb{P} \left(\left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} - \mu \right)^2 > \epsilon^2 \right) \leq \frac{\mathbb{E} \left[\left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} - \mu \right)^2 \right]}{\epsilon^2} \\ &= \frac{\text{Var} \left[\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} \right]}{\epsilon^2} \stackrel{\text{inde}}{=} \sum_{i=1}^n \frac{\text{Var}[X_i]}{n^2 \epsilon^2} = \frac{\text{Var}[X_1]}{n \epsilon^2} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

□

Emaitza honen ondorioz, esan daiteke $\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} \xrightarrow{P} \mu$ betetzen dela zorizko aldagaiak independenteak eta berdinki banatuta daudenean. Aplikazio moduan, txanpon bat airera hainbat aldiz botatzean datzan zorizko esperimendua eta X_i izango da 1 i. jaurtiketan aurpegia lortzen bada eta 0 gurutzea lortzen bada i. jaurtiketan. Suposatu p probabilitatearekin aurpegia lortzen dela jaurtiketa bakoitzean. Goiko emaitzak dioena da jaurtiketa kopurua handia bada, aurpegia lortutako aldien proportzioa p -tik gertu egon behar dela. Horrela, milaka jaurtiketa eginda, aurpegiaren proportzioa oso txikia (hau da, zerotik gertu) edo oso handia (hau da, batetik gertu) bada, ziurtatu dezakegu txanpona ez dagoela orekatuta.

Goiko emaitzaren enuntziatuak "ahula" hitza du; izan ere, horrek esan nahi du probabilitatezko konbergentzia ematen dela. Ikusi dugu 5.3.1 Proposizioa emaitzan, konbergentzia ia-ziurra betetzeak probabilitatezko konbergentzia ematea inplikatzeko duela. Hori dela eta, goiko emaitzaren baliokidea, baino baldintza murriztuago bat behar duena, izango da Zerbaki Handien Lege Indartsua, non konbergentzia ia-ziurra betetzen dela frogatzen den. Argi dago, Zerbaki Handien Lege Indartsuak Zerbaki Handien Lege Ahula inplikatzeko duela. Orain, emaitza honen enuntziatua azalduko dugu.

5.3.2 Teorema (Zenbaki Handien Lege Indartsua). *Demagun $\{X_n : n \geq 1\}$ independenteak eta berdinki banatuak, non $\mathbb{E}[X_n] = \mu$ finitua den. Orduan,*

$$\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} \xrightarrow{i.z.} \mu.$$

5.3.1 Oharra. *Lehenik, ohartu Lege Ahulean bariantza finitua izan behar dela, baina Lege Indartsuan ez. Gainera, Lege Indartsuaren frogapena oso zaila da kasu orokorrean. Hala ere, $\mathbb{E}[X_n^4]$ eta $\mathbb{E}[X_n^2]$ finituak direla suposatuz, frogapena askoz errazagoa da; hori izango da, izan ere, liburu honetan aztergai izango duguna.*

Emaizta ahul eta indartsu gehiago daude. Guk ez ditugu aztertuko liburu honetan. Baina garrantzitsua da gogoratzea emaitza indartsuek konbertzia ia-ziurra frogatzen dutela eta emaitza ahulek probabilitatezko konbergentzia.

5.4 Konbergentzia L_p -n

Lehendabizi, gogoratuko dugu $X \in \mathcal{L}_p$ dela $\mathbb{E}[|X|^p] < \infty$ betetzen bada. Horiek horrela, L_p -n konbergentzia definituko dugu orain.

5.4.1 Definizioa. $X_1, X_2, \dots$ zorizko aldagaien segida bada non $X_n \in \mathcal{L}_p$ edozein n -rako, orduan X_n -k L_p -n konbergitzen du X -ra ondokoa betetzen bada:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[|X_n - X|^p] = 0.$$

Horrela, X_n -k L_p -n konbergitzen badu X -ra, $X_n \xrightarrow{L_p} X$ idatziko dugu.

5.4.1 Oharra. L_p konbergentzia modurik ohikoenak $p = 2$ eta $p = 1$ kasuak dira, izanik batezbesteko kuadratikoko konbergentzia eta batezbesteko konbergentzia izanik, hurrenez-hurren.

5.4.1 Adibidea. *Demagun $X_1, X_2, \dots$ zorizko aldagai independenteen segida dela, non $X_n \sim \text{Ber}(1/n)$, eta definitu $Y_n = \sqrt{n}X_n$. Frogatu $Y_n \xrightarrow{L_1} 0$, baina Y_n -k ez duela konbergitzen zerora L_2 -n.*

Lehenik, L_1 -n konbergitzen duela frogatuko dugu:

$$\mathbb{E}[|Y_n - 0|] = \frac{\sqrt{n}}{n}1 + \sqrt{n}(1 - \frac{1}{n})0 = \frac{1}{\sqrt{n}} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty.$$

Orain, L_2 -n konbergentzia aztertuko dugu:

$$\mathbb{E}[|Y_n - 0|^2] = \frac{n}{n}1 + n(1 - \frac{1}{n})0 = 1,$$

eta horrek ez du jotzen zerora $n \rightarrow \infty$ denean.

Aurretik ikusi dugu konbergentzia ia-ziurra badago, orduan probabilitatean konbergentzia dagoela. Orain, antzeko emaitza bat aurkeztuko dugu L_p konbergentziarako.

5.4.1 Proposizioa. $X_n \xrightarrow{L_p} X$ bada, orduan $X_n \xrightarrow{P} X$.

Frogapena. Suposatuko dugu $\mathbb{E}[|X_n - X|^p] \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$ denean eta frogatu nahi dugu $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|X_n - X| > \epsilon) = 0$.

Markov-en ezberdintza erabiliz,

$$\mathbb{P}(|X_n - X| > \epsilon) \leq \frac{\mathbb{E}[|X_n - X|^p]}{\epsilon^p},$$

eta, $X_n \xrightarrow{L_p} X$ izateagatik, azkenengo adierazpenaren zerora jotzen du $n \rightarrow \infty$ denean. $\square$

Aurreko emaitzaren kontrako inplikazioaren kontradibide bat aurkeztuko dugu orain.

5.4.2 Adibidea. Demagun $X_1, X_2, \dots$ zorizko aldagaien segida Lebesgue-ren probabilitate espazioan $[0, 1]$ tartean definituta, hau da, $([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]), \lambda)$. Definitu $X_n = n \cdot 1_{[0, \frac{1}{n}]}$. Kasu honetan, X_n -k probabilitatean konbergitzen du zerora, baino L_2 -n ez.

$X_n = n 1_{[0, \frac{1}{n}]}$ izateagatik, ondokoa betetzen da:

$$\mathbb{P}(X_n = n) = \mathbb{P}\left(\left(0, \frac{1}{n}\right)\right) = \frac{1}{n},$$

eta

$$\mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n}.$$

X_n -k probabilitatean zerora konbergitzen duela frogatuko dugu: $\forall \epsilon > 0$,

$$\mathbb{P}(|X_n - 0| > \epsilon) = \mathbb{P}(X_n > \epsilon) = 1 - \mathbb{P}(X_n \leq \epsilon).$$

Bi kasu ezberdinduko ditugu:

- $\epsilon < n$. Kasu honetan, $1 - \mathbb{P}(X_n \leq \epsilon) = 1 - \mathbb{P}(X_n = 0)$ betetzen da.
- $\epsilon \geq n$. Kasu honetan, $1 - \mathbb{P}(X_n \leq \epsilon) = 0$ betetzen da.

Ondorioz, $1 - \mathbb{P}(X_n \leq \epsilon) \leq 1 - \mathbb{P}(X_n = 0) = 1/n$ edozein n -rako. Horrela,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|X_n - 0| > \epsilon) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Orain, zerora konbergentzia L_2 -n ez dela ematen frogatuko dugu:

$$\mathbb{E}[|X_n - 0|^2] = n^2 \frac{1}{n} + 0^2 \left(1 - \frac{1}{n}\right) = n,$$

eta horrek ez du zerora jotzen $n \rightarrow \infty$ denean.

Gogoratu, aurretik ikusi dugula konbergentzia ia-ziurra egotekotan, probabilitatezko konbergentzia ematen dela. 5.4.2 Proposizioaren emaitzak dio konbergentzia L_p -n badago, probabilitatezko konbergentzia ematen dela. Orduan, pentsa genezake konbergentzia ia-ziurra eta konbergentzia L_p -ren arteko harremana egon daitekela (batak bestea inplikatzeko duela, alegia). Jarraian, aurkeztuko dugu L_p -n konbergentzia badago, ez duela zertan konbergentzia ia-ziurra bete.

5.4.3 Adibidea. *Ikusi dugu 5.3.2 Adibidean adibide bat non probabilitatezko konbergentzia ematen den, baina ia-ziurra ez. Adibide honetan frogatuko dugu $X_n \xrightarrow{L_p} 0$.*

$$\mathbb{E}[|X_n - 0|^p] = \mathbb{E}[(1_{A_n})^p] = 1^p \mathbb{P}(A_n) + 0 \cdot (1 - \mathbb{P}(A_n)) = \frac{1}{n},$$

eta $1/n \rightarrow 0$ denez, $n \rightarrow \infty$ doanean, frogatu dugu $X_n \xrightarrow{L_p} 0$.

Beraz, aurreko adibide honetan ikusitakoaren arabera, konbergentzia L_p -n eman daiteke, baina ia-ziurrenik ez, hau da, konbergentzia L_p -n emateak ez duela inplikatzeko konbergentzia ia-ziurra. Bestalde, ikusi daiteke konbergentzia ziurra ez duela inplikatzeko konbergentzia L_p -n. Horretarako, hartu 5.2.2 Adibideko kasua, non frogatu baitugu $X_n \xrightarrow{i.z.} 0$ dela, eta frogatu ahal da X_n -k ez duela zerora konbergitzen L_p -n; izan ere,

$$\mathbb{E}[|X_n|^p] = \frac{e^{np}}{n} \rightarrow \infty.$$

Orain, frogatuko dugu, $q > p$ bada, orduan L_q -n konbergentzia badago, L_p -n konbergentzia ere badagoela.

5.4.2 Proposizioa. *Izan bedi $q > p$. Orduan, $X_n \xrightarrow{L_q} X$ bada, orduan $X_n \xrightarrow{L_p} X$.*

Frogapena. Lyapunov-en ezberdintzagatik, badakigu ondokoa egiazkoa dela:

$$\mathbb{E}[|X_n - X|^p] \leq (\mathbb{E}[|X_n - X|^q])^{\frac{p}{q}}.$$

Horrela, X_n -k X -ra L_q -n konbergitzen duenez, badakigu goiko ekuazioko eskuinaldekoak zerora jotzen duela. Horregatik, ezkerrekoak ere bai. Hori dela eta, X_n -k X -ra L_p -n konbergitzen du. $\square$

Bukatzeko atal honekin, beste Zenbaki Handien Lege bat aurkeztuko dugu, non konbergentzia L_2 -n ematen den.

5.4.1 Teorema. *Demagun $\{X_n : n \geq 1\}$ independenteak eta berdinki banatuak, non $\mathbb{E}[X_n] = \mu$ eta $\text{Var}[X_n] = \sigma^2$, non σ finitua den. Orduan,*

$$\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} \xrightarrow{L_2} \mu.$$

Frogapena. Definitu $\bar{X}_n = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$. Lehendabizi, frogatuko dugu $\bar{X}_n \in \mathcal{L}_2$ dela (eta horrela ondorioztatuko dugu $\bar{X}_n$ integragarria dela). Badakigu $|X_n^2|$ ez negatiboa izateagatik, ondokoa betetzen dela:

$$\mathbb{E}[|X_n^2|] = \frac{1}{n^2} \mathbb{E}[(\sum_{i=1}^n X_i)^2] = \frac{1}{n^2} \mathbb{E}[(\sum_{i=1}^n X_i^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n X_i X_j)].$$

Horrela, ezberdintza triangeluarragatik eta $|(\sum_{i=1}^n X_i^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n X_i X_j)| \geq 0$ izateagatik,

$$\frac{1}{n^2} \mathbb{E}[\sum_{i=1}^n X_i^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n X_i X_j] \leq \frac{1}{n^2} \mathbb{E}[\sum_{i=1}^n |X_i^2| + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |X_i| |X_j|].$$

Berriro ere $\sum_{i=1}^n |X_i^2| + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |X_i| |X_j|$ ez negatiboa dela kontuan hartuz,

$$\frac{1}{n^2} \mathbb{E}[\sum_{i=1}^n |X_i^2| + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |X_i| |X_j|] = \frac{1}{n^2} \left(\sum_{i=1}^n \mathbb{E}[|X_i^2|] + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mathbb{E}[|X_i| |X_j|] \right).$$

Orain, ohartu

$$\mathbb{E}[|X_i^2|] = \mathbb{E}[X_i^2] = \sigma^2 + \mu^2 < \infty,$$

izan ere $\sigma < \infty$ izateagatik, $\mu < \infty$ dugu. Gainera, zorizko aldagaiak independenteak izateagatik,

$$\mathbb{E}[|X_i| |X_j|] = \mathbb{E}[|X_i|] \mathbb{E}[|X_j|],$$

eta $X_1, X_2, \dots$ integragarriak izateagatik $\mathbb{E}[|X_i|] < \infty$ edozein i -rako. Horrela, azken ekuazioko eskuineko zatia finitua dela ondorioztatzen dugu eta, horrela, frogatu dugu $\bar{X}_n^2$ integragarria dela.

Orain,

$$\mathbb{E}[(\bar{X}_n - \mu)^2] = \mathbb{E}[(\bar{X}_n)^2 + \mu^2 - 2\mu\bar{X}_n].$$

Horrela, $(\bar{X}_n)^2$ eta $\bar{X}_n$ integragarriak direnez, badakigu $(\bar{X}_n)^2 + \mu^2 - 2\mu\bar{X}_n$ integragarria dela eta, horregatik,

$$\mathbb{E}[(\bar{X}_n)^2 + \mu^2 - 2\mu\bar{X}_n] = \mathbb{E}[(\bar{X}_n)^2] + \mu^2 - 2\mu\mathbb{E}[\bar{X}_n].$$

Inferentzia Estatistikako emaitza ezagun hau kontuan hartuko dugu: $\mathbb{E}[(\bar{X}_n)^2] = \text{Var}[\bar{X}_n] + \mathbb{E}[\bar{X}_n]^2 = \frac{\sigma^2}{n} + \mu^2$ eta horrela,

$$\mathbb{E}[(\bar{X}_n)^2] + \mu^2 - 2\mu\mathbb{E}[\bar{X}_n] = \frac{\sigma^2}{n} \rightarrow 0,$$

$n \rightarrow \infty$ doanean. Beraz, frogapena bukatu da.

□

5.5 Banaketazko Konbergentzia

Aurreko kasuetan bezala, $X_1, X_2, \dots$, zorizko aldagaien segida da, baita X ere, guztiak $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ probabilitate espazioan definituta. Orain, onartuko dugu F_{X_n} eta F_X direla X_n eta X -ren banaketa funtzioa, hurrenez hurren. Horrela, banaketazko konbergentziaren definizioa azalduko dugu.

5.5.1 Definizioa. $\{X_n : n \geq 1\}$ segidak X -ra konbergitzen du banaketan, $F_{X_n}(x) \rightarrow F_X(x)$ betetzen bada edozein x -rako non $F_X(x)$ jarraitua den. Horrela, X_n -k banaketan konbergitzen badu X -ra, idatziko dugu $X_n \xrightarrow{B} X$.

Definizio hau ondo ulertzeko bi adibide aurkeztuko ditugu.

5.5.1 Adibidea. Demagun $X_1, X_2, \dots$ zorizko aldagaien segida dugula, non edozein n -rako

$$F_{X_n} = \begin{cases} 1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{nx}, & x \geq 0 \\ 0, & \text{bestela.} \end{cases}$$

Argi ikusten da $F_{X_n} \rightarrow 1 - e^{-x}$, beraz, $X_n \xrightarrow{B} X$, non $X \sim \text{Exp}(1)$.

5.5.2 Adibidea. Demagun $X_1, X_2, \dots$ zorizko aldagaien segida dugula, non edozein n -rako

$$F_{X_n} = \begin{cases} 1, & x \geq 1/n \\ 0, & \text{bestela,} \end{cases}$$

eta

$$F_X = \begin{cases} 1, & x \geq 1 \\ 0, & \text{bestela,} \end{cases}$$

Erraz frogatu ahal da, $\forall x \in \mathbb{R} - \{0\}$, $F_{X_n}(x) \rightarrow F_X(x)$. Gainera, $F_{X_n}(0) = 0$ edozein n -rako eta $F_X(0) = 1$, beraz $F_{X_n}(0)$ -k ez du konbergitzen $F_X(0)$ -ra. Hala ere, banaketazko konbergentziaren definizioari erreparatuz, ez dago arazorik; izan ere, F_X ez da jarraitua zero puntuan. Hori dela eta, $X_n \xrightarrow{B} X$ egia dela esan daiteke.

Ondoko emaitzak frogatzen du probabilitatean konbergentziak banaketan konbergentzia inplikatzeko duela. Emaitza honen frogapena [5.7.2](#) atalean dago.

5.5.1 Proposizioa. $X_n \xrightarrow{P} X$ bada, orduan $X_n \xrightarrow{B} X$.

Goiko emaitzaren kontrako inplikazioaren kontradibidea aurkeztuko dugu orain.

5.5.3 Adibidea. Demagun $\Omega = \{0, 1\}$ dugula eta $\mathbb{P}(\omega = 0) = \mathbb{P}(\omega = 1) = \frac{1}{2}$. Horrela, ondoko zorizko aldagaien segida definituko dugu: $X_n(\omega) = \omega$. Aldiz, definituko dugu $X(0) = 1$ eta $X(1) = 0$. Ikusteko ez dagoela probabilitatezko konbergentzia, ohartu $|X_n(\omega) - X(\omega)| = 1$, $\forall \omega \in \Omega$, beraz diferentzia horrek ezin du zerora jo $n \rightarrow \infty$ denean.

Aldiz, banaketan konbergentzia ematen da; izan ere $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$F_{X_n}(x) = F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{1}{2}, & 0 \leq x < 1, \\ 1, & x \geq 1. \end{cases}$$

Hortaz, banaketan konbergentziaren definizioaren baldintza betetzen da.

Goiko adibidearen arabera, banaketazko konbergentziak ez du probabilitatezko konbergentzia inplikatzeko. Orain frogatuko dugu baietz inplikatzeko duela X konstantea bada.

5.5.2 Proposizioa. *Izan bedi $X \sim k$. Horrela, $X_n \xrightarrow{B} X$ bada, orduan $X_n \xrightarrow{P} X$.*

Frogapena. $X \sim k$ izateagatik, $F_X(x)$ jarraitua da zenbaki erreal guztietan $x = k$ puntuan izan ezik. Banaketazko konbergentzia emateagatik, badakigu $F_{X_n}(x) \rightarrow F_X(x)$, $\forall x \in \mathbb{R} - \{k\}$ eta gainera, $\forall \epsilon > 0$

$$F_{X_n}(k - \epsilon) = 0, \quad F_{X_n}(k + \epsilon) = 1,$$

edozein n -rako eta, ondorioz,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_{X_n}(k - \epsilon) = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} F_{X_n}(k + \epsilon) = 1.$$

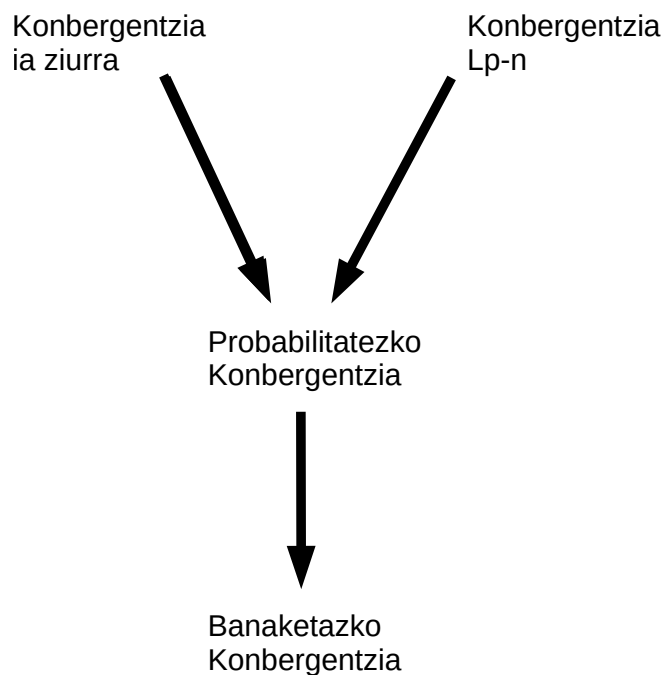
Frogatu nahi duguna da $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|X_n - k| > \epsilon) = 0$. Horrela,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|X_n - k| > \epsilon) &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\mathbb{P}(X_n - k > \epsilon) + \mathbb{P}(k - X_n > \epsilon)) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_n - k > \epsilon) + \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(k - X_n > \epsilon) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_n > k + \epsilon) + \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_n < k - \epsilon) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_n > k + \epsilon) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - F_{X_n}(k + \epsilon)) \\ &= 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} F_{X_n}(k + \epsilon) \\ &= 1 - 1 \\ &= 0. \end{aligned}$$

□

5.1 Irudia begiratz, konturatuko gara zeintzuk diren ikasitako konbergentzia moduen inplikazioak. Ohartu kontrako inplikazioak batzuetan ematen direla, azken emaitza honetan ikusi dugun moduan.

Hurrengo atalean kongergentzia banaketan ematen den kasu ezagun bat aztertuko dugu.



5.1 Irudia: Kapitulu honetan ikasitako konbergentzia moduen inplikazioen laburpena.

5.6 Limitearen Teorema Zentrala

Limitearen Teorema Zentralean zentratu aurretik, gogoratu Funtzio karakteristikoaren Bakartasunaren Teorema esaten duena, bi zorizko aldagaik funtzio karakteristiko berdinak badute, orduan haien banaketa funtzioak berdinak dira. Horrek balio du banaketazko konbergentzia ematen dela frogatzeko. Adibidez, 4.7.7 Ariketan frogatu dugu $F_{Z_n} \rightarrow F_X$ ematen dela; hori dela eta, ondorioztatu dezakegu $Z_n \xrightarrow{B} X$.

Limitearen Teorema Zentralak esaten duena da: $X_1, X_2, \dots$ independenteak eta berdinki banatuta dauden zorizko aldagaiak diren, non $\mathbb{E}[X_i] = \mu$ eta $\text{Var}[X_i] = \sigma^2$ finituak diren, orduan $\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$ -k banaketan konbergitzen duela banaketa normalera, non haren itxaropena μ eta bariantza σ^2/n diren; edo beste era batean esanda, $Y_i = \frac{X_i - \mu}{\sigma}$ bada, orduan $\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n Y_i$ -k banaketan konbergitzen du banaketa normal estandarrera, hau da:

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n Y_i(t) \rightarrow e^{-t^2/2}.$$

Eraitza honen frogapena 5.7.3 atalean aurkitu daiteke.

5.7 Frogapenak

5.7.1 Zenbaki Handien Lege Indartsuaren Frogapena

Orokortasunik galdu gabe, suposatuko dugu $X_1, X_2, \dots$ zorizko aldagaiak direla non $\mu = 0$ dela (eta horrela ez bada $Y_i = X_i - \mu$ definituko dugu).

Izan bedi $A = \{\omega \in \Omega : \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} \right| = 0\}$ eta frogatu nahi dugu $\mathbb{P}(A) = 0$ betetzen dela. Horretarako, ondokoa frogatuko dugu: edozein $\epsilon > 0$ -rako,

$$\mathbb{P} \left(\left\{ \omega \in \Omega : \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \sum_{i=0}^n X_i \right| > n\epsilon \right\} \right) = 0.$$

Borel-Canteli-ren lehenengo lematatik, goikoa betetzen da ondokoa egia bada:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P} \left(\left| \sum_{i=0}^n X_i \right| > n\epsilon \right) < \infty.$$

Beraz, $\mathbb{P} \left(\left| \sum_{i=0}^n X_i \right| > n\epsilon \right)$ aztertuko dugu orain. Markov-en lehen ezberdintza erabiliko dugu $r = 4$ kasurako

$$\mathbb{P} \left(\left| \sum_{i=0}^n X_i \right| > n\epsilon \right) \leq \frac{\mathbb{E} \left[\left| \sum_{i=0}^n X_i \right|^4 \right]}{n^4 \epsilon^4}.$$

Ondoren, itzaropenaren linealtasuna erabiliz (ohartu X_i guztiak integragarriak direla, haien itzaropena finitua delako):

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\left| \sum_{i=0}^n X_i \right|^4 \right] &= \\ &= \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[X_i^4] + \sum_{i,j} \mathbb{E}[X_i^3 X_j] + \sum_{i,j,k} \mathbb{E}[X_i^2 X_j X_k] + \sum_{i,j} \mathbb{E}[X_i^2 X_j^2] + \sum_{i,j,k,l} \mathbb{E}[X_i X_j X_k X_l]. \end{aligned}$$

Orain, zorizko aldagaiak independenteak direnez,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\left| \sum_{i=0}^n X_i \right|^4 \right] &= \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[X_i^4] + \sum_{i,j} \mathbb{E}[X_i^3] \mathbb{E}[X_j] + \sum_{i,j,k} \mathbb{E}[X_i^2] \mathbb{E}[X_j] \mathbb{E}[X_k] + \\ &\quad \sum_{i,j} \mathbb{E}[X_i^2] \mathbb{E}[X_j^2] + \sum_{i,j,k,l} \mathbb{E}[X_i] \mathbb{E}[X_j] \mathbb{E}[X_k] \mathbb{E}[X_l]. \end{aligned}$$

Horrela, zorizko aldagaien itzaropena zero dela erabiliz, goiko adierazpena sinplifikatuko dugu:

$$\mathbb{E} \left[\left| \sum_{i=0}^n X_i \right|^4 \right] = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[X_i^4] + \sum_{i,j} \mathbb{E}[X_i^2] \mathbb{E}[X_j^2].$$

Eta guztiak berdinki banatuak direnez:

$$\mathbb{E} \left[\left| \sum_{i=0}^n X_i \right|^4 \right] = n\mathbb{E}[X_1^4] + \frac{n(n-1)}{2}(\mathbb{E}[X_1^2])^2.$$

Orduan,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbb{E} \left[\left| \sum_{i=0}^n X_i \right|^4 \right]}{n^4 \epsilon^4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\mathbb{E}[X_1^4] + \frac{n(n-1)}{2}(\mathbb{E}[X_1^2])^2}{n^4 \epsilon^4},$$

eta $\mathbb{E}[X_1^2]$ eta $\mathbb{E}[X_1^4]$ finituak direnez, goiko batukaria konbergentea da. Beraz, frogatu dugu nahi genuena.

5.7.2 5.5.1 Proposizioaren frogapena

Beherako frogatuko dugu ondoko emaitza: Y eta Z zorizko aldagaiak badira non edozein a errealerako eta edozein $\epsilon > 0$ -rako, orduan

$$\mathbb{P}(Y \leq a) \leq \mathbb{P}(Z \leq a + \epsilon) + \mathbb{P}(|Y - Z| > \epsilon). \quad (5.1)$$

Probabilitatean konbergentzia suposatuko dugu, hau dau, $\mathbb{P}(|X_n - X| > \epsilon) \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$ denean eta frogatu nahi dugu $F_{X_n} \rightarrow F_X$, F_X jarraitua den puntuetan. Izan bedi $a \in \mathbb{R}$ eta suposatu F_X jarraitua dela a puntuan.

Hartuko dugu (5.1), $Y = X_n$ eta $Z = X$ jarritz eta, horrela,

$$\mathbb{P}(X_n \leq a) \leq \mathbb{P}(X \leq a + \epsilon) + \mathbb{P}(|X_n - X| > \epsilon).$$

Eta orain hartuko dugu (5.1), $Y = X$ $Z = X_n$ eta $a = a - \epsilon$ jarritz eta, horrela,

$$\mathbb{P}(X \leq a - \epsilon) \leq \mathbb{P}(X_n \leq a) + \mathbb{P}(|X_n - X| > \epsilon).$$

Aurreko bi adierazpenen ondorioz,

$$\mathbb{P}(X \leq a - \epsilon) - \mathbb{P}(|X_n - X| > \epsilon) \leq \mathbb{P}(X_n \leq a) \leq \mathbb{P}(X \leq a + \epsilon) + \mathbb{P}(|X_n - X| > \epsilon).$$

Goiko ekuazioa limitea $n \rightarrow \infty$ denean hartuz eta, kontuan hartuta probabilitatezko konbergentzia ematen dela, ondokoa lortzen dugu:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X \leq a - \epsilon) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_n \leq a) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X \leq a + \epsilon).$$

Goiko ekuazioan banaketa funtzioak agertzen direla kontuan hartuz,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_X(a - \epsilon) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} F_{X_n \leq a} \leq F_X(a + \epsilon).$$

Eta F_X jarraitua izateagatik a puntuan, goiko ekuazioagatik, $F_{X_n}(a) \rightarrow F_X(a)$ ematen dela ondorioztatzen dugu.

5.7.1 Lema. *Y eta Z zorizko aldagaiak badira non edozein a errealerako eta edozein $\epsilon > 0$ -rako, orduan*

$$\mathbb{P}(Y \leq a) \leq \mathbb{P}(Z \leq a + \epsilon) + \mathbb{P}(|Y - Z| > \epsilon).$$

Frogapena. Eraitza ondoko arrazonamenduarekin frogatzen da:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y \leq a) &= \mathbb{P}(Y \leq a \cap Z \leq a + \epsilon) + \mathbb{P}(Y \leq a \cap Z > a + \epsilon) \\ &\leq \mathbb{P}(Z \leq a + \epsilon) + \mathbb{P}(Y \leq a \cap Z > a + \epsilon) \\ &= \mathbb{P}(Z \leq a + \epsilon) + \mathbb{P}(Y - Z \leq a - Z \cap a - Z < -\epsilon) \\ &= \mathbb{P}(Z \leq a + \epsilon) + \mathbb{P}(Y - Z < -\epsilon) \\ &\leq \mathbb{P}(Z \leq a + \epsilon) + \mathbb{P}(Y - Z < -\epsilon) + \mathbb{P}(Y - Z > \epsilon) \\ &= \mathbb{P}(Z \leq a + \epsilon) + \mathbb{P}(|Y - Z| > \epsilon), \end{aligned}$$

non lehenengo ezberdintza $Z \leq a + \epsilon \cap Z \leq a + \epsilon \subset Z \leq a + \epsilon$ delako ematen den eta bigarrena $\mathbb{P}(Y - Z > \epsilon) \geq 0$ izateagatik. $\square$

5.7.3 Limitearen Teorema Zentralaren Frogapena

Hartuko dugu $Y_i = \frac{X_i - \mu}{\sigma}$ eta, horregatik, $\mathbb{E}[Y_i] = 0$ eta $\text{Var}[Y_i] = 1$, edozein i -rako. Frogatuko dugu $\frac{Y_1 + \dots + Y_n}{\sqrt{n}}$ -ren funtzio karakteristikoak banaketa normal estandarizatuaren funtzio karakteristikora konbergitzen duela. Hori frogatuta, Funtzio karakteristikoaren Bakartasunaren Teoremagatik, lortu dugu frogatzea banaketazko konbergentzia.

Funtzio karakteristikoaren propietateengatik, badakigu $\varphi_{aX+b}(t) = e^{tb} \varphi_X(at)$ eta $Y_1, Y_2, \dots$ independenteak eta berdinki banatutako zorizko aldagaiak izateagatik, beraz

$$\varphi_{\frac{Y_1 + \dots + Y_n}{\sqrt{n}}}(t) = \varphi_{Y_1 + \dots + Y_n}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = \prod_{i=1}^n \left(\varphi_{Y_i}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right) = \left(\varphi_{Y_1}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)^n.$$

Orain, 4.3.1 Korolariora aplikatuko dugu $n = 2$ kasurako, kontuan hartuta $\text{Var}[Y_i] < \infty$ dela eta, horregatik, $\mathbb{E}[Y_i^2] < \infty$ betetzen dela. Horrela, $t/\sqrt{n} \rightarrow 0$ denean

$$\varphi_{Y_1}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = 1 + i\mathbb{E}[Y_i]\frac{t}{\sqrt{n}} + \frac{i^2\mathbb{E}[Y_i^2]}{2!}\frac{t^2}{n} + o\left(\frac{t^2}{n}\right) = 1 - \frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{t^2}{n}\right).$$

Ondorioz, $t/\sqrt{n} \rightarrow 0$ denean

$$\varphi_{\frac{Y_1 + \dots + Y_n}{\sqrt{n}}}(t) = \left(1 - \frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{t^2}{n}\right)\right)^n$$

eta azken emaitzak $e^{-\frac{t^2}{2}}$ -ra jotzen du n infinitora doanean, hau da, banaketa normal estandarrera jotzen du.

5.8 Ariketak

5.8.1 Ariketa. Demagun $([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]), \lambda)$, λ Lebesgueren neurria izanik. Definitu X_n zorizko aldagaiak non $X_n(s) = 1, s \in [0, \frac{n+1}{2n})$ denean eta $X_n(s) = 0$ beste kasuetan. Gainera, ondoko zorizko aldagaia definituko dugu: $X(s) = 1, s \in [0, \frac{1}{2})$ eta $X(s) = 0$ beste kasuetan. Frogatu $X_n \xrightarrow{i.z.} X$.

5.8.2 Ariketa. Izan bedi $X_0, X_1, X_2, \dots$ $[0, 1]$ tarteko banaketa uniformeari jarraitzen dioten zorizko aldagai independenteak, $\{c_n\}$ $[0, 1]$ tarteko segida eta $Y_n = X_0 1_{X_n \geq c_n}$. Ondokoa frogatu

$$c_n \rightarrow 0 \iff Y_n \xrightarrow{P} X_0.$$

5.8.3 Ariketa. Izan bedi $X_n \sim U(0, \frac{1}{n})$. Frogatu $X_n \xrightarrow{L_p} 0$.

5.8.4 Ariketa. Demagun $X_1, \dots, X_n$ independenteak diren zorizko aldagaiak direla, non $X_i \sim U(0, 1)$. Definitu $Y_n = \min\{X_1, \dots, X_n\}$. Frogatu $Y_n \xrightarrow{P} 0$ eta $Y_n \xrightarrow{L_p} 0$.

5.8.5 Ariketa. Izan bedi $X \sim U(0, 1)$ eta $X_n \sim U(0, 1 + \frac{1}{n})$, non $n \geq 1$. Frogatu $X_n \xrightarrow{B} X$.

5.8.6 Ariketa. Izan bedi $X \sim U(0, 2)$ eta $X_n \sim U(\frac{1}{n}, 2)$, non $n \geq 1$. Frogatu $X_n \xrightarrow{B} X$.

5.8.7 Ariketa. $X_1, \dots, X_n$ independente eta berdinki banatuak diren zorizko aldagai integragarriak direla suposatu, haien funtzio karakteristikoa $\varphi(t)$ izanik. $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ definitu eta suposatu $\varphi'(0) = ai$, $a \in \mathbb{R}$ izanik. Frogatu $S_n/n \xrightarrow{P} a$.

6

Prozesu Estokastikoak

6.1 Sarrera

Prozesu estokastikoak probabilitate espazio berdinean definituriko zorizko aldagaien familia bat da, hau da, $\{X_t : t \in \mathcal{T}\}$, non edozein $t \in \mathcal{T}$ -rako X_t zorizko aldagaia den $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ probabilitate espazioan eta $\mathcal{T}$ multzoak zorizko aldagaien balioak zein denboratan ikusten dugun adierazten duen.

Prozesu estokastikoak $\mathcal{T}$ multzoaren arabera sailkatu daitezke:

- $\mathcal{T}$ multzo zenbakigarri baten barruan badago, orduan denbora diskretuko prozesu estokastikoa da. Alegia, prozesu estokastikoaren balioa segunduro, orduro... ikusten dugu.
- $\mathcal{T}$ ez badago multzo zenbaki jarri baten barruan, orduan denbora jarraituko prozesu estokastikoa da. Alegia, prozesu estokastikoaren balioa $\mathbb{R}$ -ko edozein baliotan ikusi daiteke.

Orain arte aztertu ditugun zorizko aldagaien segidak $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ denbora diskretuko prozesu estokastikoak dira, hau da, zorizko aldagaien balioa ikusten dugu egunero (edo orduro, edo minuturo). Denbora jarraituko prozesu estokastikoetan, berriz, zorizko aldagaia ikusten dugun uneak $\mathbb{R}$ -ko edozein azpimultzo izan daiteke; adibidez, zorizko aldagaia ikusi ahal da 0.2 segunduan, 1.5 segunduan, 4 segunduan...

Prozesu estokastikoak zorizko aldagaien izaeraren arabera sailkatu daitezke:

- X_t zorizko aldagai diskretua bada, orduan prozesu estokastiko diskretua dela esan-go dugu.

- X_t zorizko aldagai jarraitua bada, orduan prozesu estokastiko jarraitua dela esango dugu.

Hurrengo atalean denbora diskretuko prozesu estokastikoak aztertuko ditugu. Gainera, zorizko aldagaiak diskretuak izango dira; hau da, X_t guztietarako haren irudia S izango da, non S multzo zenbakigarria den.

Prozesu estokastiko bat aplikazio bat dela ohartuko gara, $\Omega \times \mathcal{T}$ -tik $\mathbb{R}$ -ra doana. Izan ere, t finkatuz gero, $X_t : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ zorizko aldagaia dugu. Aldiz, $\omega \in \Omega$ finkatuz gero, $X_\omega : \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}$ ibilbidea lortzen dugu.

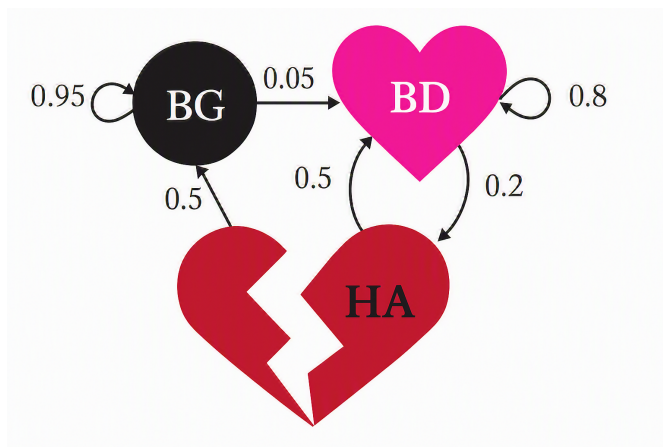
6.1.1 Adibidea. *Ibilbidea zer den argitzeko, txanpon bat airera 4 aldiz jaurtitzean datzan zorizko esperimientua hartuko dugu. Aztergai dugu zenbat aldiz lortu dugun aurpegia. Hartu $\omega = \{A, A, G, G\}$ emaitza eta, kasu horretarako, $X_1 = 1$, $X_2 = 2$, $X_3 = 2$, eta $X_4 = 2$ ibilbidea lortzen da.*

6.2 Markov Kateak

Atal honetan $|S| < \infty$ betetzen dela suposatuko dugu.

6.2.1 Adibidea

Has gaitezen maitasunaz hitz egiten. 6.1 Irudiak EHUko ikasle batek egun batean izan ahal duen egoerak (BG=bikotegabea, BD=bikotedun edo HA=harreman arriskutsua) irudikatzen dira, baita egun batetik bestera eman ahal diren egoera aldaketak.



6.1 Irudia: EHUko ikasleen egoera posibleak.

Adibidez, bikotegabe dagoen pertsona bat hurrengo egunean bikoterik gabe jarraituko du 0.95 probabilitatearekin, eta bestela bikotedun egoeran egongo da (suposatuko dugu bikoteak, hasten diren lehenengo egunean, ez direla harreman arriskutsua). Horrela, pentsatuko dugu bikotedun pertsona bat hurrengo egunean harreman arriskutsu batean dagoela 0.2 probabilitatearekin (ohartu gamma banaketarekin duen harremana)

eta, bestela, bikotearekin jarraituko duela. Bukatzeko, harreman arriskutsu batean dagoen pertsona bat, hurrengo egunean probabilitate berdinarekin bikotearekin jarraitzen du (harremana ez arrikutsua izanik) eta bikotegabe bihurtzen da.

Horrelako egoerak kontuan hartuta, ondoko galderak suertatu daitezke: zenbat denbora egongo da EHUKo ikasle bat harreman arriskutsu batean? Eta bikotegabe? Horrelako galderak erantzuteko, Markov kateak erabiliko ditugu.

6.2.2 Definizioa

Markov katearen definizioa baino lehenago, Markov propietatea aurkeztuko dugu.

6.2.1 Definizioa. *Denbora diskretuko prozesu estokastiko batek Markov propietatea betetzen duela esango dugu, ondokoa betetzen bada: $\forall j, i, i_0, i_1, \dots, i_{n-1} \in S$ eta $\forall n \geq 0$,*

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_1 = i_1, X_0 = i_0) = \mathbb{P}(X_{n+1} = j | X_n = i).$$

Markov propietateak esaten duena da zorizko aldagaiak $n+1$ unean lortutako balioa n unean zorizko aldagaiak izandako balioaren arabera da eta ez da aurreko uneetan izandako balioen menpe. Ohartu 6.1 Irudiko adibideak Markov propietatea betetzen duela; biharko egoera gaurko egoeraren arabera da, alegia aurreko egunetako egoerak ez du axola.

6.2.2 Definizioa. *Markov kate bat denbora diskretuko prozesu estokastiko bat da, non Markov propietatea betetzen den.*

Orain, Markov kate homogeneoak zer diren azalduko dugu.

6.2.3 Definizioa. *Markov kate bat homogeneoa (edo egonkorra) dela esango dugu ondokoa betetzen bada: $\forall n \geq 1$,*

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = j | X_n = i) = \mathbb{P}(X_1 = j | X_0 = i).$$

Honek esan nahi du i egoeran nagoenean hurrengo unean j egoeran egoteko probabilitatea ez dela n -ren arabera. Horrela, i egoeratik j egoerara joateko probabilitateari trantzisio probabilitatea deituko diogu eta $p_{i,j}$ adieraziko dugu. Ohartu 6.1 Irudiko adibidea Markov kate homogeneoa dela eta $p_{HA,BG} = 0.5$ eta $p_{BG,BD} = 0.05$ (gogoratu HA=harreman arriskutsua, BG=bikotegabea eta BD=bikoteduna).

Trantzisio probabilitateak matrize batean idatzi ahal dira, $P = (p_{i,j})_{i,j \in S}$. Adibidez, 6.1 Irudiko adibidean, ondoko trantzisio matrizea izango dugu:

$$P = \begin{pmatrix} BG & BD & HA \\ 0.95 & 0.05 & 0 \\ 0 & 0.8 & 0.2 \\ 0.5 & 0.5 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} BG \\ BD \\ HA \end{matrix}$$

Ohartu, definizioz, P matrize estokastikoa dela, hau da, $\sum_{j \in S} p_{i,j} = 1, \forall i \in S$ eta $p_{i,j} \geq 0, \forall i, j \in S$.

6.2.3 Probabilitate-limiteak

Orain suposatuko dugu i egoeran gaudela hasierako unean eta jakin nahi dugu n une (edo n pausu) igaro ondoren, zein den j egoeran egoteko probabilitatea, alegia

$$\mathbb{P}(X_n = i | X_0 = j).$$

Goiko balioari $p_{i,j}^{(n)}$ deituko diogu eta, beraz, n pausuko trantzizio matrizea $P^{(n)} = (p_{i,j}^{(n)})_{i,j \in S}$ da.

Adibide moduan, frogatuko dugu 6.1 Irudiko adibideko kasuan, hasieran bikotegabe dagoen pertsona bat bigarren egunean bikotegabe egoteko probabilitatea 0.1 dela. Lehenik,

$$\mathbb{P}(X_1 = BD | X_0 = BD) = 0.8, \mathbb{P}(X_1 = HA | X_0 = BD) = 0.2, \mathbb{P}(X_1 = BG | X_0 = BD) = 0$$

eta

$$\mathbb{P}(X_2 = BG | X_1 = BD) = 0, \mathbb{P}(X_2 = BG | X_1 = HA) = 0.5, \mathbb{P}(X_2 = BG | X_1 = BG) = 0.95.$$

Horrela,

$$\mathbb{P}(X_2 = BG | X_0 = BD) = 0.8 \cdot 0 + 0.2 \cdot 0.5 + 0 \cdot 0.95 = 0.1.$$

Aldiz, hasieran bikotegabe badago, bigarren egunean bikotegabe egoteko probabilitatea 0.9025 da. Hori egiaztatzeko:

$$\mathbb{P}(X_1 = BD | X_0 = BG) = 0.05, \mathbb{P}(X_1 = BG | X_0 = BG) = 0.95, \mathbb{P}(X_1 = HA | X_0 = BG) = 0$$

eta, arestian esandakoagatik,

$$\mathbb{P}(X_2 = BG | X_1 = BD) = 0, \mathbb{P}(X_2 = BG | X_1 = HA) = 0.5, \mathbb{P}(X_2 = BG | X_1 = BG) = 0.95.$$

Horrela,

$$\mathbb{P}(X_2 = BG | X_0 = BG) = 0.95 \cdot 0.95 + 0 \cdot 0.05 + 0.5 \cdot 0 = 0.9025.$$

Orain $P \cdot P$ eginez (hau da P^2), ondokoa lortzen dugu:

$$P^2 = \begin{pmatrix} BG & BD & HA \\ 0.9025 & 0.0875 & 0.010 \\ 0.100 & 0.740 & 0.160 \\ 0.475 & 0.425 & 0.100 \end{pmatrix} \begin{matrix} BG \\ BD \\ HA \end{matrix}$$

hau da, matrize honen balioek kalkulaturako balioekin bat datozela ikusten da. Ondoko emaitzan adibide honetan ikusitakoa frogatzen da.

6.2.1 Proposizioa. $P^{(n)}$ P matrizea n aldiz biderkatuz lortutako matrizea da.

Frogapena. Indukzioz frogatuko dugu n -rekiko. Lehenik, $n = 1$ kasurako egia dela badakigu trantzisio matrizearen definizioz. Orain, suposatu $n - 1$ -erako egia dela, hau da, $P^{(n-1)} = P \cdot \dots \cdot P$ ($n - 1$ aldiz) eta frogatuko dugu betetzen dela n -rako, baina matrizearen elementu bakoitzerako, hau da, edozein $i, j \in S$ -rako,

$$p_{i,j}^{(n)} = \sum_{l \in S} p_{i,l}^{(n-1)} p_{l,j}.$$

Kontuan hartu, definizioz,

$$p_{i,j}^{(n)} = \mathbb{P}(X_n = j | X_0 = i).$$

Ohartuko gara $B_1, B_2, \dots$ Ω -ren partiketa bada, orduan $\mathbb{P}(A) = \sum_{i \geq 1} \mathbb{P}(A \cap B_i)$ eta, ondorioz

$$\mathbb{P}(X_n = j | X_0 = i) = \sum_{l \in S} \mathbb{P}(X_n = j, X_{n-1} = l | X_0 = i).$$

Badakigu A, B gertaerak badira, $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(A|B)$; horregatik probabilitate baldintzatuak ere propietate hau betetzen du, alegia C gertaera bada,

$$\mathbb{P}(A \cap B | C) = \mathbb{P}(B | C)\mathbb{P}(A | B \cap C)$$

Horrela

$$\mathbb{P}(X_n = j, X_{n-1} = l | X_0 = i) = \mathbb{P}(X_n = j | X_{n-1} = l, X_0 = i) \mathbb{P}(X_{n-1} = l | X_0 = i).$$

Hipotesi induktiboa dela eta, $\mathbb{P}(X_{n-1} = l | X_0 = i) = p_{i,l}^{(n-1)}$ eta Markov propietateagatik, $\mathbb{P}(X_n = j | X_{n-1} = l, X_0 = i) = \mathbb{P}(X_n = j | X_{n-1} = l)$. Hori dela eta,

$$\mathbb{P}(X_n = j, X_{n-1} = l | X_0 = i) = p_{i,l}^{(n-1)} p_{l,j}$$

eta beraz, $p_{i,j}^{(n)} = \sum_{l \in S} p_{i,l}^{(n-1)} p_{l,j}$, hau da, frogatu dugu nahi genuena. $\square$

Kalkula dezagun P^n 6.1 Irudiko adibideko kasuan, n -ren balio ezberdinetarako.

$$P^{10} = \begin{pmatrix} 0.704 & 0.248 & 0.0474 \\ 0.474 & 0.434 & 0.091 \\ 0.583 & 0.346 & 0.070 \end{pmatrix}$$

eta

$$P^{100} = \begin{pmatrix} 0.625 & 0.3125 & 0.0625 \\ 0.625 & 0.3125 & 0.0625 \\ 0.625 & 0.3125 & 0.0625 \end{pmatrix}$$

Ohartu, azken matrize honen errenkaden balioak berdinak direla. Alegia, bikotegabe egoteko probabilitatea 100 unean 0.625 da eta balio hori ez da hasierako balioaren arabera. Horrek esan nahi du 100 unean egoteko probabilitatea independientea dela hasierako uneko egoerarekiko. Orain, $P^{(n)}$ aztertuko dugu $n \rightarrow \infty$ denean, probabilitate-limitea definitze aldera.

6.2.4 Definizioa. *Izan bedi $\pi_j = \lim_{n \rightarrow \infty} p_{i,j}^{(n)}$. Balio hau probabilitate-limitea deitzen da eta hasierako egoera i -rekiko independientea da.*

Probabilitate-limiteek banaketa-limitea osatzen dute, π bezala idatziko duguna. Horrela, $\pi = (\pi_j)_{j \in S}$ izango dugu, non

$$\sum_{j \in S} \pi_j = 1.$$

Ohartu banaketa-limitea definitzerakoan, limite bat dela esan dugula. Hala ere, limite horrek ez du beti zertan existitu. Momentuz, limitea existitzen dela suposatuko dugu eta aurrerako azalduko dugu zein baldintzak bete behar diren limitea existitzeko.

6.1 Irudiko adibidea 100 baino handiagoko balioekin P^n kalkulatz gero, ondokoa lortzen dugu:

$$P \cdot \begin{pmatrix} 0.625 & 0.3125 & 0.0625 \\ 0.625 & 0.3125 & 0.0625 \\ 0.625 & 0.3125 & 0.0625 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.625 & 0.3125 & 0.0625 \\ 0.625 & 0.3125 & 0.0625 \\ 0.625 & 0.3125 & 0.0625 \end{pmatrix},$$

hau da, goiko propietateak adierazten du ondokoa dela banaketa-limitea: $\pi = (0.625, 0.312, 0.0625)$. Adibidez, harreman arriskutsuan egoteko banaketa-limitea 0.0625 da.

6.2.4 Banaketa Egonkorra

Aurrean definitutako P matrizea oso handia izan daiteke, beraz banaketa-limitea kalkulatzeko P^n n handia denean kalkulatzeko oso konplexua izan daiteke konputazionalki (hau da, denbora gehiegi behar duela ordenagailu batek hori ebazteko). Beste modu bat dagoela azalduko dugu orain. Has gaitezen banaketa egonkorra definitzen.

6.2.5 Definizioa. *Izan bedi $v = (v_i)_{i \in S}$ non $\sum_{i \in S} v_i = 1$ eta P Markov katearen trantzizio matrizea. Orduan, v banaketa egonkorra da ondokoa betetzen bada:*

$$v \cdot P = v.$$

Goiko ekuazioa ondoko eran berridatzi daiteke: $\forall j \in S$,

$$\sum_{i \in S} v_i p_{i,j} = v_j.$$

Ekuazio hauei egonkortasun ekuazioak deitzen zaie. Ohartu ekuazio honetako ezker zatiak adierazten duena dela j egoerara hurrengo unean joateko probabilitate, orain v_i

probabilitatearekin i egoera egotekotan. Horrela, v banaketak jarraitzen duen egoeratan egotekotan, hurrengo pausoan ere v banaketak jarraitzen duen egoeratan egongo da.

6.1 Irudiko adibideko banaketa egonkorra kalkulatu dugu:

$$(v_{BG}, v_{BD}, v_{HA}) \begin{pmatrix} 0.95 & 0.05 & 0 \\ 0 & 0.8 & 0.2 \\ 0.5 & 0.5 & 0 \end{pmatrix} = (v_{BG}, v_{BD}, v_{HA}),$$

non $v_{BG} + v_{BD} + v_{HA} = 1$. Horrela, ondoko sistema ekuazioa lortzen dugu (ohartu 4 ekuazio lortzen dugula, baina haietako bat besteen konbinazio lineala dela eta, beraz, ez dugu kontuan hartuko):

$$0.95v_{BG} + 0.5v_{HA} = v_{BG}, 0.2v_{BD} = v_{HA}, v_{BG} + v_{BD} + v_{HA} = 1.$$

Ekuazio hauek ebatziz, ondokoa lortzen dugu: $v_{BG} = \frac{5}{8}$, $v_{BD} = \frac{5}{16}$ eta $v_{HA} = \frac{1}{16}$. Konturatuko gara, kasu honetan, banaketa-limitea eta banaketa egonkorren balioak berdinak direla. Ondoko emaitzak berdintasun hau frogatzen du.

6.2.1 Teorema. *Suposatu π existitzen dela eta v banaketa egonkorra dela. Orduan, $v = \pi$ eta banaketa egonkorra bakarra da.*

Teorema hau frogatzeko, ondoko bi lemak frogatuko ditugu.

6.2.1 Lema. *π existitzen bada, π banaketa egonkorra da, hau da, $\pi P = \pi$ betetzen da.*

Frogapena. Hartu $j \in S$ eta frogatuko dugu $\pi_j = \sum_{k \in S} \pi_k p_{k,j}$.

$$\pi_j = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(p_{i,j}^{(n+1)} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k \in S} p_{i,k}^{(n)} p_{k,j} = \sum_{k \in S} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} p_{i,k}^{(n)} \right) p_{k,j} = \sum_{k \in S} \pi_k p_{k,j}.$$

□

6.2.2 Lema. *π existitzen bada, banaketa egonkorra bakarra dago.*

Frogapena. Suposatu v banaketa egonkorra dela. Frogatuko dugu $v = \pi$ dela. Horrela, v banaketa egonkorra denez, $v \cdot P = v$ eta, beraz, $v \cdot P^{(n)} = v$ eta, beraz, $\forall j \in S$,

$$v_j = \sum_{i \in S} v_i p_{i,j}^{(n)}.$$

Ondorioz,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v_j = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i \in S} v_i p_{i,j}^{(n)}.$$

Eta $\lim_{n \rightarrow \infty} v_j = v_j$ denez edozein $j \in S$ -rako, orduan $v_j = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i \in S} v_i p_{i,j}^{(n)}$ lortu dugu. Orduan, $|S| < \infty$ denez,

$$v_j = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i \in S} v_i p_{i,j}^{(n)} = \sum_{i \in S} v_i \lim_{n \rightarrow \infty} p_{i,j}^{(n)} = \sum_{i \in S} v_i \pi_j = \pi_j \sum_{i \in S} v_i = \pi_j.$$

□

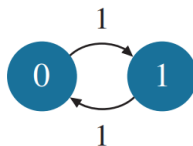
Frogatu dugun teorema honen arabera, banaketa-limitea existitzen bada, banaketa egonkoraren berdina da eta, orduan, sistema ekuazio bat ebatziz lortu daiteke banaketa-limitea (eta ez da beharrezkoa P^n kalkulatzeko n handietarako). Hurrengo atalean, banaketa-limitearen existentzia aztertuko dugu.

6.2.5 Ergodikotasuna

Lehenik, adibide bat azalduko dugu non banaketa-limitea ez den existitzen. Ondoko trantsizio matrizea duen Markov katea kontsideratuko dugu:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ohartu edozein n naturalerako P^{2n} 2 tamainako matrize indentitatea dela eta $P^{2n+1} = P$. Beraz, banaketa-limitea ez da existitzen.



6.2 Irudia: Banaketa-limitea ez da existitzen Markov kate honetan.

Hala ere, egonkortasun ekuazioak ebatziz, $\pi_0 = \pi_1 = 1/2$ lortzen dugu. Adibide honek erakusten du banaketa-limitea existitzen ez bada ere, banaketa egonkoraren soluzioa aurkitu daitekela, hau da, banaketa egonkorra existitzen dela.

Ondoko definizioa aurkeztuko dugu, zatitzaile komunik handiena (zkh) kontzeptua erabiltzen duena.

6.2.6 Definizioa. j egoeraren periodoa ondoko eran definitzen da $\text{zkh}\{n \in \mathbb{N} : p_{j,j}^{(n)} > 0\}$. Horrela, egoera bat aperiodikoa da haren periodoa 1 bada.

6.2 Irudiko adibidean, 0 eta 1 egoeren periodoa bi dela ikusten da. Beraz, egoera hauek ez dira aperiodikoak.

Orain, beste definizio batzuk azalduko ditugu:

6.2.7 Definizioa. Esango dugu j egoera i egoeratik irisgarria dela existitzen bada $n \in \mathbb{N}$ non $p_{i,j}^n > 0$.

6.2.8 Definizioa. Markov kate bat laburtzina da haren egoera bikote guztiak irisgarriak badira.

6.2.9 Definizioa. Markov kate bat ergodikoa da aperiodikoa eta laburtzina bada.



6.3 Irudia: Markov kate hauek ez dira laburtezinak.

Ohartu 6.1 Irudiko Markov katea ergodikoa dela. Ondoko teoremak frogatzen du ergodikotasunak inplikatzeko duela banaketa-limitearen existentzia. Emaizta honen frogapena 6.4.1 atalean dago.

6.2.2 Teorema (Egoera finitodun Markov Kateen Teorema Ergodikoa). *Markov kate bat ergodikoa bada, orduan banaketa-limitea existitzen da.*

6.2.1 Oharra. *Frogapena $p_{i,j} > 0 \forall i, j \in S$ den kasurako egingo dugu. Kasu honetan, argi dago Markov katea ergodikoa dela.*

6.2.2 Oharra. *Atal honetako zenbait luzapen ikasi daitezke. Esate baterako, banaketa-limitearen existentziaren analisia askoz ere zailagoa da S infinitu zenbakigarria bada. Bestalde, denbora jarraituko Markov kateak hemen ikasitako beste luzapen bat izango litzateke.*

6.3 Poisson Prozesua

Gogoratu f funtzioa $o(h)$ dela ondokoa betetzen bada: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} = 0$. Honek esan nahi du h txikia denean, $f(h)$ txikiagoa dela.

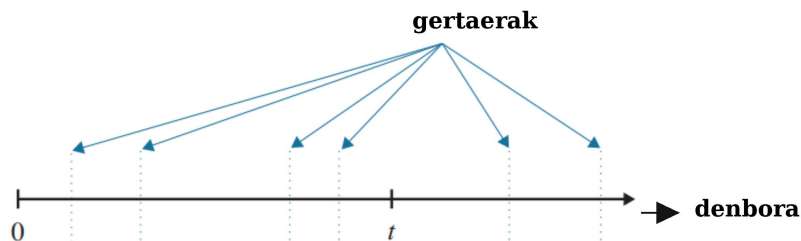
Atal honetan, denbora jarraituko prozesu estokastikoetan zentratuko gara eta, hauen bidez, gertaerak zenbatuko ditugu. Hau da, gertaera segida bat izango dugu (autobus bat geltokira ailegatzea, esate baterako) eta prozesu estokastiko bat definituko dugu gertaera kopuruak zenbatzen duena.

6.3.1 Definizioa. $\{X_t : t \in \mathcal{T}\}$ prozesu estokastikoa zenbaketa prozesua izango da $[0, t]$ tartean emandako gertaera kopurua adierazten badu.

Zenbaketa prozesuek ondoko propietateak betetzen dituzte:

- X_t -ren irudia zenbaki osoz osatuta dago.
- $s < t$ bada, orduan X_s -ren balioa X_t -rena baino txikiagoa edo berdina da, hau da, $X_s \leq X_t$.
- $s < t$ bada, X_t -ren eta X_s -ren balioen kenketak, hau da, $X_t - X_s$ -ren balioak, $(s, t]$ tartean emandako gertaera kopurua adierazten du.

6.4 Irudiko adibidean X_t -ren balioa 4 dela ikusten da.



6.4 Irudia: Gertaera segida baten adibidea.

6.3.2 Definizioa. Zenbaketa prozesu batek gehikuntza independenteak ditu denbora disjuntuetan ematen diren gertaera kopuruak independenteak badira. Esate baterako, $[0, s]$ eta $(s, t]$ tarteetan emandako gertaera kopuruak (hurrenez hurren X_s eta $X_t - X_s$) independenteak badira.

6.3.3 Definizioa. Zenbaketa prozesu batek gehikuntza homogeneoa duela esaten dugu denbora tarte batean emandako gertaera kopuruaren banaketa kopurua denbora tarte horren luzeraren arabera dela, baino tartearen hasierako balioaren arabera ez. Hau da, $X_{t+s} - X_s$ -ren banaketa s -ren independentea dela.

Orain $\lambda > 0$ parametrodun Poisson prozesua definituko dugu.

6.3.4 Definizioa. Zenbaketa prozesu bat λ parametrodun Poisson prozesua dela esango dugu ondokoa betetzen bada:

- $X_0 = 0$
- Gehikuntza independenteak eta homogeneoak ditu
- t luzerako denbora tarte batean emandako gertaera kopuruaren banaketak $Poi(\lambda t)$ banaketari jarraitzen dio.

6.3.1 Oharra. Ohartu Poisson prozesua eta Poisson banaketaren arteko desberdintasuna; lehena prozesu estokastiko bat da eta bigarrena probalitate-banaketa bat da.

Orain, frogatuko dugu Poisson prozesuek duten propietate garrantzitsu bat. Frogapena atal honetako eranskinetan aurkitu daiteke.

6.3.1 Proposizioa. Demagun λ parametrodun Poisson prozesua dugula. Orduan gertaeren artean ematen den denborak λ parametrodun banaketa exponentzialari jarraitzen dio.

Bukatzeko, esango dugu bi Poisson prozesu bateratu ditugula (*merge* ingelesez), bi gertaera segidetan emandako gertaera guztiak kontuan hartzen baditugu. Ikusi 6.5 Irudia.

Eta ondoko emaitza frogatuko dugu.



6.5 Irudia: Bi Poisson prozesuen bateraketa.

6.3.2 Proposizioa. *Demagun bi Poisson prozesu independente ditugula, lehena λ parametroduna eta bigarrena μ parametroduna. Bi Poisson prozesuen bateraketa $\lambda + \mu$ parametrodun Poisson prozesua da.*

Frogapena. Izan bitez $\{N_1(t)\}_{t \geq 0}$ eta $\{N_2(t)\}_{t \geq 0}$ bi Poisson prozesu independente, lehenengo $\lambda > 0$ parametrokoa eta bigarrena $\mu > 0$ parametrokoa. Defini dezagun haien bateraketa

$$N(t) := N_1(t) + N_2(t), \quad t \geq 0.$$

Orduan $\{N(t)\}_{t \geq 0}$ $\lambda + \mu$ parametroko Poisson prozesua dela frogatuko dugu. Horretarako, honako hiru propietateak egiaztatu behar ditugu.

Lehenengo baldintzari dagokionez:

Argi dago

$$N(0) = N_1(0) + N_2(0) = 0.$$

Ondoren, gehikuntza independenteen propietatea betetzen dela frogatuko dugu. Har ditzagun $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n$. Orduan,

$$N(t_i) - N(t_{i-1}) = (N_1(t_i) - N_1(t_{i-1})) + (N_2(t_i) - N_2(t_{i-1})).$$

Poisson prozesuen propietateengatik,

$$\{N_1(t_i) - N_1(t_{i-1})\}_{i=1}^n \quad \text{eta} \quad \{N_2(t_i) - N_2(t_{i-1})\}_{i=1}^n$$

independenteak dira, eta gainera N_1 eta N_2 prozesuak beraien artean independenteak direnez,

$$\{N(t_i) - N(t_{i-1})\}_{i=1}^n$$

inkrementu independentez osatuta dago.

Bukatzeko, har dezagun $s, t \geq 0$. Badakigu

$$N_1(t+s) - N_1(s) \sim \text{Poisson}(\lambda t), \quad N_2(t+s) - N_2(s) \sim \text{Poisson}(\mu t),$$

eta bi aldagai horiek independenteak dira. Poisson aldagai independenteen batura Poisson banaketa jarraitzen duela badakigu (2. mailako probabilitateko emaitza da, beraz

ez dugu frogatuko hemen); horregatik ondorioztatzen dugu:

$$N(t + s) - N(s) \sim \text{Poisson}((\lambda + \mu)t).$$

Ohartu $N(t + s) - N(t)$ ez dela s -ren menpekoa, beraz gehikuntza homogeneousen propietatea betetzen du.

□

6.4 Frogapenak

6.4.1 Egoera finitodun Markov Kateen Teorema Ergodikoa

Frogapena $p_{i,j} > 0$ denerako kasuan egingo dugu. Kapitulu honetan esandakoagatik, $\lim_{n \rightarrow \infty} P^n$ matrize bat da, non zutabe berdineko balio guztiak berdinak diren. M matrize horren j . zutabeari $M\vec{e}_j$ deituko diogu. Horrela, frogatuko dugu $\lim_{n \rightarrow \infty} P^n \vec{e}_j$ bektoreko balio guztiak berdinak direla.

Demagun M_n dela $P^n \vec{e}_j$ bektorearen baliorik handiena eta m_n txikiena. Beherago frogatuko dugu ondoko propietatea betetzen dela: $M_n - m_n \leq (1 - 2s)(M_{n-1} - m_{n-1})$, non s P matrizeko baliorik txikiena den. Badakigu s ez dela zero $p_{i,j} > 0$ delako eta, ondorioz, $1 - 2s < 1$ denez, $P^n \vec{e}_j$ P matrizearekin biderkatzen den bakoitzean baliorik handiena eta txikienaren arteko diferentzia txikitzen da. Beraz, $n \rightarrow \infty$ denean, infinitu aldiz biderkatzen dugu P -rekin eta, horrela, diferentzia zero dela ikusten da.

6.4.1 Lema. *Goiko frogapenaren baldintzetan, $M_n - m_n \leq (1 - 2s)(M_{n-1} - m_{n-1})$, betetzen da.*

Frogapena. Izan bedi $\vec{y} = P^{(n-1)} \vec{e}_j$. Ohartu $P\vec{y}$ dela $\vec{y}$ -ren elementuen konbinazio lineala. Konbinazio lineal horren balio maximoa M_n izango da eta haren goi borna ondoko moduan lortzen da: m_{n-1} (hau da, $\vec{y}$ -ren balio minimoa) s -rekin biderkatzen eta $M_{n-1}(1 - s)$ -rekin biderkatzen; hau da,

$$M_n \leq sm_{n-1} + (1 - s)M_{n-1}.$$

Era berean, ondoko propietatea lortzen da: $m_n \geq (1 - s)m_{n-1} + sM_{n-1}$. Horrela,

$$M_n - m_n \leq sm_{n-1} + (1 - s)M_{n-1} - (1 - s)m_{n-1} - sM_{n-1} = (1 - 2s)(M_{n-1} - m_{n-1}).$$

Eta, beraz, frogatu dugu nahi genuena.

□

6.4.2 Poisson banaketa eta exponentziala

Frogapena. Demagun $\{N(t) : t \in \tau\}$ Poisson prozesua dela. Defini dezagun

$$T_i := \inf\{t > 0 : N(t) = i\}, \quad i \geq 1,$$

eta gertaeren arteko denborak

$$S_i := T_i - T_{i-1}, \quad i \geq 1,$$

non $T_0 = 0$. Orduan, frogatuko dugu $\{S_i : i \geq 1\}$ zorizko aldagaiak independenteak eta berdin-banatuta daudela, eta

$$S_i \sim \text{Exp}(\lambda), \quad i \geq 1.$$

Lehenik, S_1 aztertuko dugu. Definizioz,

$$\{S_1 > t\} = \{T_1 > t\} = \{N(t) = 0\}.$$

Poisson prozesuaren propietatez,

$$N(t) \sim \text{Poisson}(\lambda t),$$

eta hortaz:

$$\mathbb{P}(S_1 > t) = \mathbb{P}(N(t) = 0) = e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0.$$

Beraz,

$$S_1 \sim \text{Exp}(\lambda).$$

Orain S_2 aztertuko dugu. Har ditzagun $s, t \geq 0$. Baldintzazko probabilitatea kalkulatzeko dugu:

$$\mathbb{P}(S_2 > t \mid T_1 = s) = \mathbb{P}(T_2 - T_1 > t \mid T_1 = s).$$

Hau baliokidea da

$$\mathbb{P}(N(s+t) - N(s) = 0).$$

Poisson prozesuak inkrementu independente eta homogeneoak dituenaz,

$$N(s+t) - N(s) \sim \text{Poisson}(\lambda t),$$

eta banaketa hori ez da s -ren araberakoa. Hortaz,

$$\mathbb{P}(S_2 > t \mid T_1 = s) = e^{-\lambda t}.$$

Ondorioz,

$$S_2 \sim \text{Exp}(\lambda),$$

eta S_2 independentea da T_1 -ekiko (eta, beraz, S_1 -ekiko).

Argudio bera aplikatu daiteke edozein $i \geq 2$ rako. Izan bedi $s \geq 0$:

$$\mathbb{P}(S_i > t \mid T_{i-1} = s) = \mathbb{P}(N(s+t) - N(s) = 0) = e^{-\lambda t}.$$

Beraz,

$$S_i \sim \text{Exp}(\lambda),$$

eta S_i independentea da T_{i-1} -ekiko, eta ondorioz

$$\{S_i : i \geq 1\} \text{ independenteak dira.}$$

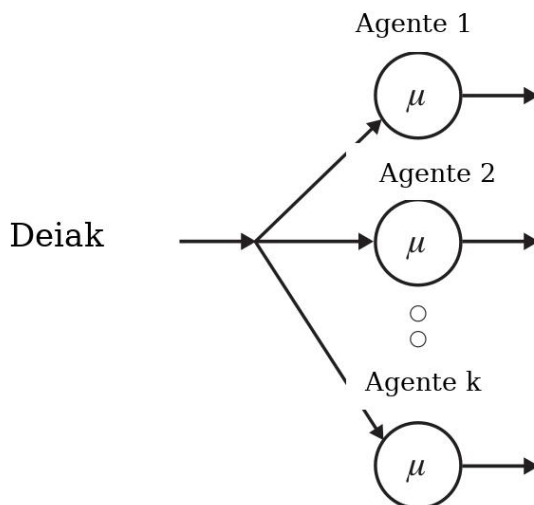
□

6.5 Ariketak

6.5.1 Ariketa. 3×3 -ko karratu batean dauden 9 aukeren arteetarik batean zoriz aukeraturako toki batean jartzen dugu arratoi bat. Segundu bakoitzean, arratoiak mugimendu bakarra (gora, behera, eskuinera edo ezkerretara) egin dezake edo geldi gera daiteke, aukera guztiak probabilitate berdinarekin gertatu ahal direlarik.

1. Definitu sistema hau aztertzeko beharrezkoa den prozesu estokastikoa eta deskribatu egoera posible guztien multzoa.
2. Esan daiteke denbora diskretuko Markov kate homogeneoa dela? Baiezko kasuan, irudikatu Markov katea eta kalkulatu trantsizio matrizea.

6.5.2 Ariketa. Dei-zentro bat kudeatzen dugula pentsatuko dugu. Dei-zentro honetan k agente (server) daude, jasotako deiei erantzuteko. Dei berri bat ailegatzen denean, libre dagoen agente bati bidaliko zaio deia. Aldiz, agente guztiak okupatuta badaude dei berri bat ailegatzen denean, deia blokeatzen dela suposatuko dugu, hau da, deia bukatzen da erantzunik jaso gabe (ez dagoelako itzaroteko aukerarik eta beranduago berriro deitzea proposatzen zaio). Ikusi 6.6 Irudia. Suposatuko dugu minutu batean λ probabilitateare-



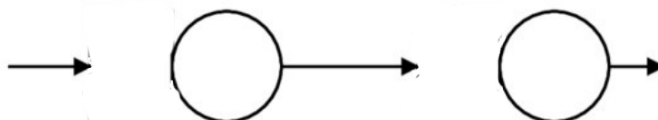
6.6 Irudia: Dei-zentro baten eredu matematikoa.

kin dei berri bat ailegatzeko dela eta agente batek μ probabilitatearekin erantzuten dutela. Suposatu $\lambda + k\mu < 1$ eta denbora une bakoitzean, gehienez gertaera bat (dei bat jaso edo dei bat erantzun) eman ahal dela. Zein da t infinitora doanean dei bat blokeatuta izateko probabilitatea?

6.5.3 Ariketa. Pertsona batek egunero korrika egiten du. Etartetik ateratzearakoan, aurreko atetik edo atzekotik ateratzen da, haietariko bat aukeratzen duelarik probabilitate berdinarekin. Horrela, etxera bueltatzen denean, probabilitate berdinarekin aukeratzen du aurreko atetik edo atzekotik sartzea. Pertsona honek 5 zapatila pare ditu. Horrela, korrika egin eta gero etxera sartzeko erabilitako atearen ondoan uzten ditu erabilitako zapatilak. Etartetik ateratzeko aukeratutako atean zapatilarik ez egotekotan, oinuzik ateratzen da korrika egitera. Deskribatu prozesu estokastikoa eta horren egoera posible guztien multzoa. Denbora diskretuko Markov kate homogeneoa dela egiaztatu. Irudikatu Markov katea. Kalkulatu trantsizio matrizea eta banaketa-limitea.

6.5.4 Ariketa. Pertsona bat egun bakoitzean etxetik lanera joaten da eta hurrengoan lanetik etxera. Eta horrela egunero. Bi aterki baino ez ditu. Euria egiten du p probabilitatearekin. Hori gertatuz gero tokiz aldatzen denean, aterki bat hartzen du irtetzen den tokitik (aterkirik egotekotan, noski). Aldiz, ez badu euririk egiten, ez du aterkirik hartzen. Aztertuko dugu egunero, esnatzen den tokian, dagoen aterki kopurua. Jakin nahi dugu zein den, denbora infinitora doanean, pertsona hau bustitzeko probabilitatea $p = 0.6$ denean.

6.5.5 Ariketa. Bi ilarez osatutako sistema aztertuko dugu. Ikusi 6.7 Irudia. Bezero



6.7 Irudia: Bi ilarez sortutako sistema.

berriak lehenengo ilarara baino ez dira ailegatzeko eta hori, une oro eta lehenengo ilara hutsik dagoenean, λ probabilitatearekin ematen da; horrela, lehenengo ilara bezero bati zerbitzu ematen ari denean, ezin da beste bezerorik ailegatu. Lehenengo ilaran une oro μ_1 probabilitatearekin zerbitzua bukatzen du bezero batek eta, hori gertatzerakoan, bigarren ilarara bidaltzen da; bertan, zerbitzua jasotzen hasten da bigarren ilara hutsik badago eta, bestela, bezero hori sistematik joaten da betirako. Bukatzeko, bigarren ilaran dagoen bezeroak une oro μ_2 probabilitatearekin zerbitzua bukatzen du eta, hori gertatzerakoan, sistematik joaten da betirako. Suposatu $\lambda + \mu_1 + \mu_2 < 1$. Deskribatu prozesu estokastikoa eta horren egoera posible guztien multzoa. Denbora diskretuko Markov kate homogeneoa dela egiaztatu. Irudikatu Markov katea. Kalkulatu trantsizio matrizea.

6.5.6 Ariketa. Zoriz 1 eta 6 balioen arteko zenbaki bat aukeratzen da eta X_1 deituko zaio balio horri. Orduan $n > 1$ guztietarako, X_n izango da zoriz 1 eta X_{n-1} balioen

arteko aukeratutako balio bat. Denbora diskretuko Markov kate homogeneoa dela egiaztatu. Trantsizio matrizea kalkulatu. Jakinda hirugarren unean 3 balioa lortu duela, zein da bigarren unean 4 lortzeko probabilitatea.

6.5.7 Ariketa. Demagun $\{X_t : t \in \mathcal{T}\}$ $\lambda = 0.5$ parametrodun Poisson prozesua dela. Orduan,

1. Kalkulatu zein probabilitatearekin ez den egongo gertaerarik $(3,5]$ tartean.
2. Kalkulatu zein den ondoko tarteetan gertaera bana emateko probabilitatea: $(0,1]$, $(1,2]$, $(2,3]$ eta $(3,4]$.

7

Baldintzazko Itxaropena

$(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ probalitate espazioa dela onartuko dugu kapitulu honetan ere. Gogoratu 3.4 atalean ikusi dugula itxaropen baldintzatua, baina A gertaerak baldintzatua. Atal honetan σ -algebra batek baldintzatutako itxaropena aztertuko dugu hasteko eta, ondoren, martingalak zer diren azalduko dugu.

7.1 Definizioa

Suposatu $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ Ω -ren partiketa dela, hau da, $A_n \in \mathcal{B}$, edozein n naturalerako eta $\Omega = \cup_{n \geq 1} A_n$ eta $A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i, j$; suposatuko dugu ere $\mathbb{P}(A_i) > 0$ i guztietarako.

Hasteko, ondoko σ -algebra definituko dugu: $\mathcal{G} = \sigma(\{A_n : n \in \mathbb{N}\})$. Badakigu $\mathcal{G} \subset \mathcal{B}$. Demagun $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ dela, $X \in \mathcal{B}/\beta$ eta integragarria izanik.

7.1.1 Definizioa. $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$ zorizko aldagai bat da, hau da, $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, eta ondokoa betetzen du: $\forall \omega \in \Omega$,

$$\mathbb{E}[X|\mathcal{G}](\omega) = \mathbb{E}[X|A_i],$$

$\omega \in A_i$ bada.

Ohartu, goiko definizioaren formularen eskuineko aldean dagoena, zorizko aldagai baten itxaropen baldintzatua dela, $A \in \mathcal{B}$ gertaerak baldintzatua eta hori 3.4.1 Definizioan ikusi dugula zer den.

Bestalde, aurreko definizioaren ondorioz, ondokoa dugu:

$$\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] = \sum_{n \geq 1} \mathbb{E}[X|A_n] 1_{A_n}.$$

Ondoko emaitza aurkeztuko dugu orain. Frogapena 7.4.1 atalean aurkitu daiteke.

7.1.1 Proposizioa. Demagun $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ Ω -ren partiketa dela, $\mathbb{P}(A_n) > 0$ izanik, $n \geq 1$, eta $\mathcal{G} = \sigma(A_n : n \geq 1) \subset \mathcal{B}$ dela. Horrela, X neurgarria eta integragarria bada, $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$ zorizko aldagaia da non $X \in \mathcal{G}/\beta$ eta $\forall B \in \mathcal{G}$

$$\int_B \mathbb{E}[X|\mathcal{G}] d\mathbb{P} = \int_B X d\mathbb{P}.$$

Goiko emaitza kontuan hartuta, 7.1.1 Definizioan ikusitakoa $\mathcal{G} = \sigma(A_1, A_2, \dots)$ -rako, edozein σ -aljebrara orokortuko dugu.

7.1.2 Definizioa. $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ da eta ondokoa betetzen du:

- $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] \in \mathcal{G}/\beta$
- $\forall B \in \mathcal{G}$

$$\int_B \mathbb{E}[X|\mathcal{G}] d\mathbb{P} = \int_B X d\mathbb{P}.$$

Goiko definizioko baldintzazko itxaropenaren existentzia frogatu daiteke, baino liburu honetan ez dugu frogapen hori aurkeztuko; beraz, hori egitzat joko dugu hemendik aurrera. Bakartasuna ia-ziurrenik ematen dela ikusteko, ondoko eran egingo dugu: suposatu $h_1 = \mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$ eta $h_2 = \mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$ direla. Horrela, $\forall B \in \mathcal{G}$,

$$\int_B h_1 d\mathbb{P} = \int_B h_2 d\mathbb{P},$$

eta honek inplikutzen du h_1 eta h_2 ia-ziurrenik berdinak direla. Hurrengo atalean, baldintzazko itxaropenaren beste propietate batzuk frogatuko ditugu, haiek ia-ziurrenik betetzen direlarik.

7.2 Propietateak

Kapitulu honetan definitutako baldintzazko itxaropenak propietate interesgarri batzuk aurkeztuko ditugu. Horrela, $\mathcal{G} \subset \mathcal{B}$ ematen dela suposatuko dugu, hau da, $\mathcal{G}$ izango dela $\mathcal{B}$ -ren azpi- σ -algebra.

7.2.1 Proposizioa. X integragarria bada, $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$ integragarria da.

Frogapena. Badakigu $\forall B \in \mathcal{G}$,

$$\int_B \mathbb{E}[X|\mathcal{G}] d\mathbb{P} = \int_B X d\mathbb{P}.$$

Idatziko dugu $E[X|\mathcal{G}] = E[X|\mathcal{G}]^+ + E[X|\mathcal{G}]^-$ eta frogatuko dugu $\int_{\Omega} \mathbb{E}[X|\mathcal{G}]^+ d\mathbb{P} < \infty$ eta $\int_{\Omega} \mathbb{E}[X|\mathcal{G}]^- d\mathbb{P} < \infty$.

Definitu $B_+ = \{\omega \in \Omega : \mathbb{E}[X|\mathcal{G}] \geq 0\}$. Ez-negatiboak diren balioen multzoa β -n daudenez, badakigu $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] \in \mathcal{G}/\beta$ betetzen dela. Beraz,

$$\int_{B^+} \mathbb{E}[X|\mathcal{G}] d\mathbb{P} = \int_{B^+} X d\mathbb{P} \leq \int_{B^+} |X| d\mathbb{P},$$

berdintza baldintzazko itxaropenaren definizioagatik ematen delarik eta ezberdintza $X \leq |X|$ izateagatik. Orain, ohartu X integragarria izateagatik, $\int_{B^+} |X| d\mathbb{P}$ finitua dela.

Bestalde,

$$\int_{B^+} \mathbb{E}[X|\mathcal{G}] d\mathbb{P} = \int_{\Omega} 1_{B^+} \mathbb{E}[X|\mathcal{G}] d\mathbb{P} = \int_{\Omega} \mathbb{E}[X|\mathcal{G}]^+ d\mathbb{P},$$

azkenengo berdintza B_+ -en definizioagatik ematen delarik. Horiek horrela, frogatu dugu $\int_{\Omega} \mathbb{E}[X|\mathcal{G}]^+ d\mathbb{P}$ finitua dela, hau da, $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]^+$ integragarria dela. Modu antzekoan frogatu daiteke $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]^-$ ere integragarria dela.

□

Orain arte, suposatu dugu X integragarria dela eta, nahiz eta ez esan, baita ere $X \in \mathcal{B}/\beta$. Ondoko emaitzan $X \in \mathcal{G}/\beta$ suposatuko dugu.

7.2.2 Proposizioa. $X \in \mathcal{G}/\beta$ bada, $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] = X$.

Frogapena. Frogatuko dugu $X \in \mathcal{G}/\beta$ denean, baldintzazko itxaropenaren definizioaren bi baldintzak betetzen dituela. Lehena, emaitzaren hipotesia da eta bigarrena ere egia da, izan ere $\forall B \in \mathcal{G}$

$$\int_B X d\mathbb{P} = \int_B \mathbb{E}[X|\mathcal{G}] d\mathbb{P} = \int_B X d\mathbb{P}.$$

□

Orain, baldintzazko itxaropenaren linealitatean zentratuko gara. Emaitza honen frogapena 7.4.2 atalean aurkitu ahal da.

7.2.3 Proposizioa. Demagun X_1 eta X_2 zorizko aldagai integragarriak direla. Orduan,

$$\mathbb{E}[X_1 + X_2|\mathcal{G}] = \mathbb{E}[X_1|\mathcal{G}] + \mathbb{E}[X_2|\mathcal{G}].$$

eta $\alpha \in \mathbb{R}$ bada, orduan $\mathbb{E}[\alpha X_1] = \alpha \mathbb{E}[X_1]$.

Goiko emaitzaren ondorioz, ondokoa dugu.

7.2.1 Korolarioa. X integragarria bada, orduan

$$|\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]| \leq \mathbb{E}[|X||\mathcal{G}].$$

Frogapena. Idatziko dugu $X = X^+ - X^-$ eta badakigu X^+ eta X^- integragarriak direla (X integragarria delako). Beraz, linealitatea erabiliz,

$$|\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]| = |\mathbb{E}[X^+ - X^-|\mathcal{G}]| = |\mathbb{E}[X^+|\mathcal{G}] - \mathbb{E}[X^-|\mathcal{G}]|. \quad (7.1)$$

Ezberdintza triangeluarra erabiliz,

$$|\mathbb{E}[X^+|\mathcal{G}] - \mathbb{E}[X^-|\mathcal{G}]| \leq |\mathbb{E}[X^+|\mathcal{G}]| + |\mathbb{E}[X^-|\mathcal{G}]|. \quad (7.2)$$

Orain, X^+ eta X^- ez negatiboak dira, beraz, $|\mathbb{E}[X^+|\mathcal{G}]| = \mathbb{E}[X^+|\mathcal{G}]$ eta $|\mathbb{E}[X^-|\mathcal{G}]| = \mathbb{E}[X^-|\mathcal{G}]$. Horrela, linealitatea erabiliz berriro, baita $|X| = X^+ - X^-$ ere,

$$|\mathbb{E}[X^+|\mathcal{G}]| + |\mathbb{E}[X^-|\mathcal{G}]| = \mathbb{E}[X^+|\mathcal{G}] + \mathbb{E}[X^-|\mathcal{G}] = \mathbb{E}[X^+ + X^-|\mathcal{G}] = \mathbb{E}[|X||\mathcal{G}]. \quad (7.3)$$

Beraz, (7.1), (7.2) eta (7.3) kontuan hartuta, frogatu dugu nahi genuena. $\square$

7.2.1 Oharra. Baldintzazko itxaropenak beste propietate batzuk betetzen ditu 3 ataleko itxaropenak betetzen dituenak, esate baterako monotonia, Cauchy-Schwartz-en ezberdintza, Jensen-en ezberdintza, Fatou-ren lema, Konbergentzia Monotonoaren Teorema...

Azkenik, independentziari buruzko ondoko emaitza frogatuko dugu.

7.2.4 Proposizioa. Demagun X zorizko aldagaia dela eta $\sigma(X)$ eta $\mathcal{G}$ σ -algebra independenteak direla. Orduan,

$$\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] = \mathbb{E}[X].$$

Frogapena. Baldintzazko itxaropenaren definizioagatik, ondokoa frogatu behar dugu: $\forall B \in \mathcal{G}$

$$\int_B \mathbb{E}[X] d\mathbb{P} = \int_B X d\mathbb{P}.$$

Alde batetik,

$$\int_B X d\mathbb{P} = \int X 1_B d\mathbb{P} = \mathbb{E}[X 1_B] = \mathbb{E}[X] \mathbb{P}(B),$$

non azkenengo berdintza $\sigma(X)$ eta $\mathcal{B}$ independenteak izateagatik ematen den. Bestetik,

$$\int_B \mathbb{E}[X] d\mathbb{P} = \mathbb{E}[X] \int_B d\mathbb{P} = \mathbb{E}[X] \mathbb{P}(B),$$

non lehenengo berdintza baldintzazko probabilitatearen linealitateagatik (1_B integragarria izateagatik betetzen dena) ematen den. Horrela, frogapena bukatutzat jotzen dugu. $\square$

Notazioari dagokionez, $Y, X_1, X_2, \dots, X_n$ zorizko aldagaiak badira, askotan baldintzazko itxaropena ondoko eran idazten da:

$$\mathbb{E}[Y|X_1, X_2, \dots, X_n].$$

Honek esan nahi du $\mathcal{G}$ -ren itxaropen baldintzatua aztertzen ari garela, non $\mathcal{G} =$

$\sigma(X_1, X_2, \dots, X_n)$ hartzen ari garen, hau da, $\mathcal{G}$ izango da σ -aljebrarik txikiena egiten duena $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ neurgarria izatea.

7.3 Martingalak

Martingalak baldintzazko itxaropena erabiliz definitutako prozesu estokastikoak dira. Atal honetan denbora diskretuko martingalak ikasiko ditugu. Lehendabizi, ikus dezagun zer den filtrazio bat.

7.3.1 Definizioa. Demagun $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ probabilitate espazioa dela. Horrela, $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ -ren filtrazio bat $\{\mathcal{F}_n : n \geq 1\}$ σ -aljebraren familia da non $\{\emptyset, \Omega\} \subset \mathcal{F}_n \subset \mathcal{B}$ edozein n -rako eta

$$\mathcal{F}_1 \subset \dots \subset \mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1} \subset \dots$$

Hitzak erabiliz, filtrazio bat σ -aljebraren familia bat da orden ez-beherakorrean daudenak. Ohartu $\mathcal{F}_n$ guztiak $\mathcal{B}$ -ren azpi- σ -aljebrak direla. Orain, denbora diskretuko prozesu estokastiko baten filtrazio naturala definituko dugu.

7.3.2 Definizioa. Demagun $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ prozesu estokastikoa dela. Filtrazio naturala $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \dots, X_n)$ da.

Ohartu filtrazio naturalak orden ez-beherakorrean egotearen propietatea betetzen duela; izan ere, $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1}$ ematen da.

Orain, definizio garrantzitsu bat azalduko dugu.

7.3.3 Definizioa. Demagun $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ prozesu estokastikoa bat dela eta $\{\mathcal{F}_n : n \in \mathbb{N}\}$ filtrazio bat. Orduan, $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ egokitzen da $\{\mathcal{F}_n : n \in \mathbb{N}\}$ filtraziora, $X_n \in \mathcal{F}_n/\beta$ bada edozein n -rako.

Denbora diskretuko martinagala bat zer den aurkeztuko dugu jarraian.

7.3.4 Definizioa. Demagun $\{\mathcal{F}_n : n \in \mathbb{N}\}$ $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ -ren filtrazio bat dela eta $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ filtrazio honi egokitutako prozesu estokastikoa dela. Prozesu estokastiko hori martinagala bat izango da ondokoa betetzen bada edozein n -rako:

1. X_n integragarria bada edozein n -rako
2. $\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] = X_n$.

7.3.1 Adibidea. Suposatu edozein unean 10 balioa probabilitate $1/4$ -rekin lortzen dugula, 8 balioa probabilitate $1/4$ -rekin eta, bestela, -9 balioa lortzen dugula. Horrela, kontsideratuko dugu X_n izango dela n -ra arte lortutako balioen batura. Hartuko dugu $\mathcal{F}_n$ filtrazio naturala. Frogatuko dugu X_n martinagala dela. Definitu Y_n n unean lortutako balioaren zorizko aldagaia. Horrela,

$$\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[X_n + Y_{n+1}|\mathcal{F}_n].$$

Argi dago X_n eta Y_{n+1} integragarriak direla eta beraz,

$$\mathbb{E}[X_n + Y_{n+1} | \mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[X_n | \mathcal{F}_n] + \mathbb{E}[Y_{n+1} | \mathcal{F}_n].$$

Orain, $\sigma(Y_{n+1})$ eta $\mathcal{F}_n$ independenteak dira, beraz 7.2.4 Proposizioa kontuan hartuta

$$\mathbb{E}[Y_{n+1} | \mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[Y_{n+1}] = 10 \frac{1}{4} + 8 \frac{1}{4} - 9 \frac{1}{2} = 0.$$

Bestalde, $X_n \in \mathcal{F}_n / \beta$ da eta, horregatik, 7.2.2 Proposizioa erabiliz,

$$\mathbb{E}[X_n | \mathcal{F}_n] = X_n.$$

Ondorioz, $\mathbb{E}[X_{n+1} | \mathcal{F}_n] = 0 + X_n = X_n$ eta, beraz, $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ martingala da.

Bukatzeko, azpi-martingala eta goi-martingalak definituko ditugu.

7.3.5 Definizioa. Demagun $\{\mathcal{F}_n : n \in \mathbb{N}\}$ $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ -ren filtrazio bat dela eta $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ filtrazio honi egokitutako prozesu estokastikoa dela. Prozesu estokastiko hori **azpi-martingala** bat izango da ondokoa betetzen bada edozein n -rako:

1. X_n integragarria bada edozein n -rako
2. $\mathbb{E}[X_{n+1} | \mathcal{F}_n] \geq X_n$.

7.3.6 Definizioa. Demagun $\{\mathcal{F}_n : n \in \mathbb{N}\}$ $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ -ren filtrazio bat dela eta $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ filtrazio honi egokitutako prozesu estokastikoa dela. Prozesu estokastiko hori **goi-martingala** bat izango da ondokoa betetzen bada edozein n -rako:

1. X_n integragarria bada edozein n -rako
2. $\mathbb{E}[X_{n+1} | \mathcal{F}_n] \leq X_n$.

7.4 Frogapenak

7.4.1 7.1.1 Proposizioaren frogapena

Ohartu $B = \cup_{j \in M} A_j$ $M \subset \mathbb{N}$ baterako. Izan bedi $\omega \in A_i$, $\mathbb{E}[X | \mathcal{G}](\omega)$ konstantea denez $\forall \omega \in A_i$, ondokoa lortzen dugu:

$$\int_{A_i} \mathbb{E}[X | \mathcal{G}] d\mathbb{P} = \mathbb{E}[X | \mathcal{G}] \int_{A_i} d\mathbb{P} = \mathbb{E}[X | A_i] \mathbb{P}(A_i).$$

3.4.1 Definizioa kontuan hartuta,

$$\mathbb{E}[X | A_i] \mathbb{P}(A_i) = \int_{A_i} X d\mathbb{P}.$$

Beraz,

$$\int_B \mathbb{E}[X|\mathcal{G}]d\mathbb{P} = \int_{\cup_{j \in M} A_j} \mathbb{E}[X|\mathcal{G}]d\mathbb{P} = \int_{\cup_{j \in M} A_j} \mathbb{E}[X|\mathcal{G}]d\mathbb{P} = \sum_{j \in M} \int_{A_j} \mathbb{E}[X|\mathcal{G}]d\mathbb{P}.$$

Goian frogatu dugu $\int_{A_i} \mathbb{E}[X|\mathcal{G}]d\mathbb{P} = \int_{A_i} X d\mathbb{P}$ betetzen dela, orduan

$$\sum_{j \in M} \int_{A_j} \mathbb{E}[X|\mathcal{G}]d\mathbb{P} = \sum_{j \in M} \int_{A_j} X d\mathbb{P} = \int_{\cup_{j \in M} A_j} X d\mathbb{P} = \int_B X d\mathbb{P}.$$

Horrela, frogatu dugu $\int_B \mathbb{E}[X|\mathcal{G}]d\mathbb{P} = \int_B X d\mathbb{P}$ betetzen dela. Orain, $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] \in \mathcal{G}/\beta$ betetzen dela frogatuko dugu, hau da, frogatuko dugu

$$\forall B \in \beta, \mathbb{E}[X|\mathcal{G}]^{-1}(B) \in \mathcal{G}.$$

Hartu $B \in \beta$,

$$\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega : \mathbb{E}[X|\mathcal{G}](\omega) \in B\} = \bigcup_{j \in M} A_j,$$

$M \in \mathbb{N}$ baterako. Horrela, $\mathcal{G} = \sigma(A_1, A_2, \dots)$ denez, $A_j \in \mathcal{G}$ betetzen da eta, horren ondorioz, $\cup_{j \in M} A_j \in \mathcal{G}$ ere bai.

7.4.2 7.2.3 Proposizioaren frogapena

Izan bedi $Z = \mathbb{E}[X_1|\mathcal{G}] + \mathbb{E}[X_2|\mathcal{G}]$, X_1 eta X_2 integragarriak izanik. Honek baldintzazko itxaropenaren bi propietateak betetzen dituela frogatuko dugu.

- $Z \in \mathcal{G}/\beta$.

Badakigu $\mathbb{E}[X_1|\mathcal{G}] \in \mathcal{G}/\beta$ eta $\mathbb{E}[X_2|\mathcal{G}] \in \mathcal{G}/\beta$ ere bai. Beraz, frogatu dugu nahi genuena.

- $\forall B \in \mathcal{G}, \int_B Z d\mathbb{P} = \int_B (X_1 + X_2) d\mathbb{P}.$

Hartu $B \in \mathcal{G}$ eta $\mathbb{E}[X_i|\mathcal{G}]$ integragarria izateagatik, $i = 1, 2$ -rako,

$$\int_B Z d\mathbb{P} = \int_B (\mathbb{E}[X_1|\mathcal{G}] + \mathbb{E}[X_2|\mathcal{G}])d\mathbb{P} = \int_B \mathbb{E}[X_1|\mathcal{G}]d\mathbb{P} + \int_B \mathbb{E}[X_2|\mathcal{G}]d\mathbb{P}.$$

Eta baldintzazko itxaropenaren definizioagatik, $\int_B \mathbb{E}[X_i|\mathcal{G}]d\mathbb{P} = \int_B X_i d\mathbb{P}$ betetzen da, $i = 1, 2$ -rako. Beraz,

$$\int_B Z d\mathbb{P} = \int_B X_1 d\mathbb{P} + \int_B X_2 d\mathbb{P}.$$

Azkenik, X_1 eta X_2 integragarriak izateagatik,

$$\int_B X_1 d\mathbb{P} + \int_B X_2 d\mathbb{P} = \int_B (X_1 + X_2) d\mathbb{P},$$

betetzen da, eta horrela frogatu dugu nahi genuena.

Orain $Z = \alpha \mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$ definituko dugu, X integragarria izanik. Eta baldintzazko itxaropenaren bi propietateak betetzen dituela frogatuko dugu.

- $Z \in \mathcal{G}/\beta$.

Badakigu $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] \in \mathcal{G}/\beta$. Beraz, Z -k ere betetzen du propietate hau.

- $\forall B \in \mathcal{G}, \int_B Z d\mathbb{P} = \int_B \alpha X d\mathbb{P}$.

Hartu $B \in \mathcal{G}$ eta $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$ integragarria izateagatik

$$\int_B Z d\mathbb{P} = \int_B \alpha \mathbb{E}[X|\mathcal{G}] d\mathbb{P} = \alpha \int_B \mathbb{E}[X|\mathcal{G}] d\mathbb{P}.$$

Eta baldintzazko itxaropenaren definizioagatik, $\int_B \mathbb{E}[X|\mathcal{G}] d\mathbb{P} = \int_B X d\mathbb{P}$ betetzen da. Beraz,

$$\int_B Z d\mathbb{P} = \alpha \int_B X d\mathbb{P}.$$

Azkenik, X integragarria izateagatik,

$$\alpha \int_B X d\mathbb{P} = \int_B \alpha X d\mathbb{P},$$

betetzen da, eta horrela frogatu dugu nahi genuena.

7.5 Ariketak

7.5.1 Ariketa. Izan bedi Y_n zorizko aldagaia haren irudia, edozein n -rako, $\{4, -1, -3\}$ izanik eta $\mathbb{P}(Y_n = 4) = p$ eta $\mathbb{P}(Y_n = -1) = q$. Suposatu $Y_1, Y_2, \dots$, independienteak direla. Definitu $X_n = \sum_{j=1}^n Y_j$ eta hartuko dugu $\mathcal{F}_n$ filtrazio naturala. Zein baldintza bete behar dute p eta q balioek X_n martingala izateko?

7.5.2 Ariketa. Izan bedi Y_n zorizko aldagaia haren irudia, edozein n -rako, $\{2, 0, -1\}$ izanik eta $\mathbb{P}(Y_n = 2) = 1/2$ eta $\mathbb{P}(Y_n = 0) = 1/4$. Suposatu $Y_1, Y_2, \dots$, independienteak direla. Definitu $X_n = \sum_{j=1}^n Y_j$ eta hartuko dugu $\mathcal{F}_n$ filtrazio naturala. Frogatu X_n azpi-martingala dela.

7.5.3 Ariketa. Izan bedi Y_n zorizko aldagaia haren irudia, edozein n -rako, $\{3, -1, -2\}$ izanik eta $\mathbb{P}(Y_n = 3) = 1/10$ eta $\mathbb{P}(Y_n = -1) = 4/10$. Suposatu $Y_1, Y_2, \dots$, independenteak direla. Definitu $X_n = \sum_{j=1}^n Y_j$ eta hartuko dugu $\mathcal{F}_n$ filtrazio naturala. Frogatu X_n goi-martingala dela.

7.5.4 Ariketa. Izan bedi Y_n zorizko aldagaia haren irudia, edozein n -rako, $\{12, 3, -7\}$ izanik eta $\mathbb{P}(Y_n = 12) = 1/6$ eta $\mathbb{P}(Y_n = 3) = 1/3$. Suposatu $Y_1, Y_2, \dots$, independenteak direla. Definitu $X_n = nc + \sum_{j=1}^n Y_j$ eta hartuko dugu $\mathcal{F}_n$ filtrazio naturala. Aurkitu c -ren balioa X_n martingala izateko.

Bibliografia

- [1] G.R. GRIMMETT, D.R. STIRZAKER, Probability and Random processes, Oxford Science Publications, 1992.
- [2] S. M. ROSS. Introduction to Probability Models. Academic Press, 2014.
- [3] A.F. KARR, Probability, Springer Verlag, 1993.
- [4] S. M. ROSS. A First Course in Probability. Pearson, 2010.
- [5] S.I. RESNICK, A Probability Path, Birkhauser, 1999.
- [6] P. BILLINGSLEY, Probability and Measure, Wiley, New York, 1986.
- [7] David Williams, Probability with Martingales, Cambridge University Press, 1991.
- [8] Arup Bose, Arijit Chakrabarty, Rajat Subhra Hazra, A Little Book of Martingales, Springer, Texts and Readings in Mathematics , 2024
- [9] J. NEVEU, Martingales a temps discret, Dunod, 1972.
- [10] A. N. SHIRYAYEV, Probability, Springer-Verlag, New York, 1996.
- [11] R. DURRET. Probability: Theory and Examples. Cambridge University Press, 2019.
- [12] S. KARLIN, H.M: TAYLOR. A First Course in Stochastic Processes eta A Second Course in Stochastic Processes. Academic Press, 1981.
- [13] E. CINLAR. Probability and Stochastics. Springer, 2013
- [14] J. R. NORRIS. Markov Chains. Cambridge University Press, 1997.
- [15] S. ASMUSSEN. Applied Probability and Queues. Springer, 2003.
- [16] J-F LE GALL. Measure Theory. Probability, and Stochastic Processes, Springer, 2022
- [17] E CINLAR. Probability and Stochastics, Graduate Texts in Mathematics, Springer, 2011

- [18] K. L. CHUNG. Elementary Probability Theory with Stochastic Processes, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer, 1975.
- [19] P BREMAUD. Probability Theory and Stochastic Processes, Universitext, Springer, 2020